# КРАТКИЙ КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Учебник**

# ВВЕДЕНИЕ

Развитие Современного промышленного и других видов производств требует формирования и развития качественных профессиональных компетенций у современных инженерных кадров. Будущие инженеры должны обладать высоким уровнем профессиональных компетенций, которые связаны развитыми пространственно-графическим мышлением, изобретательскими и творческими способностями, а также умением правильно воспринимать образно-графическую информацию.

Одним из инструментов формирования таких компетенций у бакалавров/ специалистов инженерных направленностей является предмет «Начертательная геометрия», который давно является одной из обязательных общепрофессиональных дисциплин в технических вузах мира. Данный предмет по своему содержанию занимает особое место среди других наук, так как она является лучшим средством развития у человека пространственного и образного воображения.

Одной из ветвей математики является геометрия, которую часто используют для решения многих математических задач. Начертательная геометрия – это один из разделов геометрии, в котором изучаются различные методы изображения пространственных объектов на плоскости и по своему содержанию занимает особое положение среди других наук. Она позволяет графически отобразить решение математических, физических и конструкторских задач.

Встречается глубокое ошибочное мнение, что при внедрении в учебный процесс дисциплины «Инженерная компьютерная графика» предмет «Начертательная геометрия» становится не нужным. Эффективность использования машин однозначно зависит от знаний основ начертательной геометрии и умения использовать их как в стадии разработки системных программ, так и в решении прикладных задач. Человек, не умеющий читать и разрабатывать чертёж на бумаге, не может осмысленно это сделать и при помощи компьютера.

Помимо выше сказанного, следует отметить, что начертательная геометрия является одной из основных дисциплин в профессиональной подготовке специалистов и бакалавров инженерного профиля. Очень сложно полно представить себе какой-либо объект, расположенный в пространстве, даже по самому подробному его описанию, человеку без развитого воображения. Но это возможно сделать, имея проекционный чертеж объекта и его наглядное изображение. Методы изображения начертательной геометрии позволяют с большой наглядностью и точностью изобразить, существующие в пространстве или возникающие в воображении, предметы.

Данный учебник содержит сжатую теоретическую информацию, необходимую студентам при подготовке к практическим, лабораторным занятиям и аттестации по курсу начертательной геометрии. Кроме того, представленные материалы должны позволить студенту самостоятель-но более подробно изучить, интересующие его, разделы начертательной геометрии.

Интенсификация учебного процесса в вузах выдвигает новые требования к методике и средствам обучения, к повышению качества подготовки специалистов. В настоящее время программа ми предлагается до 50% учебного времени, запланированного на изучение дисциплины, отводить студентам на самостоятельное изучение. В связи с этим учебник даёт возможность выбора необходимого учебного материала, содержит сведения, необходимые не только для учебного процесса, но и для организации научно-исследовательской работы со студентами, а также для решения инженерных задач и использования методики проблемного обучения.

# ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

Для однозначного понимания геометрических записей и изображений обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записи геометрических предложений при решении задач, в начертательной геометрии предлагается использовать геометрический язык, составленный из обозначений геометрических объектов, символов их взаиморасположения и логических операций.

Все указанные обозначения приняты с учетом обозначений и символов в изданиях курсов начертательной геометрии для студентов технических высших учебных заведений.

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:

A, B, C, D, …,L, M, N, …

1, 2, 3, 4, …, 12, 13, 14, …

Линии , произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c, d, …,l, m, n, …

Линии уровня обозначаются: h – горизонталь; f – фронталь; p – профильная прямая;

Для прямых используются также следующие обозначения:

(AB) – прямая, проходящая через точки A и B;

[AB) – луч с началом в точке A;

[AB] – отрезок прямой, ограниченный точками A и B. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита:

α, β, γ, δ, …, ζ, η, λ, …

Чтобы подчеркнуть способ задания поверхности, следует указывать геометрические элементы, которыми она определяется, например:

α (a || b) – плоскость α определяется параллельными прямыми a и b;

β ($d_1$,$d_2$,g,α) – поверхность β определяется направляющими $d_1$ и$d_2$, образующей g и плоскостью параллелизма α.

Углы обозначаются:

$\angle$ ABC – угол с вершиной в точке B, а также $\angle\alpha^{o}$, $\angle\beta^{o}$, …, $\angle\varphi^{o}$, ..,

Угловая величина (градусная мера) обозначается знаком, который ставится над углом:

$\varphi^{o}$ – величина угла $\varphi$.

Прямой угол отмечается квадратом с точкой внутри.

Для плоскостей проекций приняты традиционные обозначения: $\pi_1$ $\pi_2$ $\pi_3$, где $\pi_1$ – горизонтальная плоскость проекций; $\pi_2$ – фронтальная плоскость проекций; $\pi_3$ – профильная плоскость проекций;

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей проекций последние обозначаются $\pi_4$, $\pi_5$ и т.д.

Оси проекций обозначаются: x, y, z, где x – ось абсцисс; y – ось ординат; z – ось аппликат.

Постоянную прямую эпюра Монжа обозначают k.

Проекции точек, линий поверхностей, любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекций, на которой они получены:

$A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, …,$L_1$, $M_1$, $N_1$, … – горизонтальные проекции точек;

$A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, …,$L_2$, $M_2$, $N_2$, … – фронтальные проекции точек;

$A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$, …,$L_3$, $M_3$, $N_3$, …– профильные проекции точек;

$a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, …,$l_1$, $m_1$, $n_1$, … – горизонтальные проекции линий;

$a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, …,$l_2$, $m_2$, $n_2$, … – фронтальные проекции линий; $a_3$, $b_3$, $c_3$, $d_3$, …,$l_3$, $m_3$, $n_3$, … – профильные проекции линий;

$\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, …, $\zeta_1$, $\eta_1$, $\lambda_1$, …– горизонтальные проекции поверхностей;

$\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, $\delta_2$, …, $\zeta_2$, $\eta_2$, $\lambda_2$, …–фронтальные проекции поверхностей; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, $\delta_3$, …, $\zeta_3$, $\eta_3$, $\lambda_3$, …–профильные проекции поверхностей. Следы прямых (линий) обозначаются прописными буквами, с которых начинаются слова, определяющие название (в латинской транскрипции) плоскости проекций, которую пересекает линия.

Например: H – горизонтальный след прямой (линии) a;

F – фронтальный след прямой (линии) a;

P – профильный след прямой (линии) a.

Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что горизонталь и фронталь, с добавлением верхнего индекса, подчеркивающего, что эти линии лежат в плоскости проекций и принадлежат плоскости.

Например: $h^0$ – горизонтальный след плоскости (поверхности);

$f^0$ – фронтальный след плоскости (поверхности);
$p^0$ – профильный след плоскости (поверхности).
Основные операции:
$\|$ – параллельность элементов; $\equiv$ – совпадение
двух геометрических элементов;
$\perp$ – перпендикулярность элементов; $\wedge$
– знак, соответствующий союзу «и»;
= – результат геометрической операции;
$\cap$ – пересечение двух элементов;
$\in$ – знак принадлежности и включения для точки;
$\cup$ – знак объединения;
$\subset$ – принадлежность одного геометрического элемента другому;
$\dot{-}$ – скрещивающиеся прямые.

# 1. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## 1.1. Предмет начертательной геометрии

Начертательная геометрия является одной из фундаментальных наук, составляющих основу инженерно-технического образования. Она изучает методы изображений пространственных геометрических фигур на плоскостях и способы решения, на основании этих изображений, метрических и позиционных задач.

Указанные методы используются при конструировании, проектировании и изображении различных сложных поверхностей технических форм, конструкций и сооружений на объектах промышленности и транспорта. Кроме этого, методы начертательной геометрии позволяют решать многие научные и прикладные задачи специальных инженер-ных дисциплин (механики, химии, кристаллографии, картографии, инструментоведения и др.)

Конструирование сложных форм поверхностей, автоматизированное проектирование и компьютерная графика находят все большее применение при создании современной транспортной техники. Основой такого проектирования является начертательная геометрия.

Изучение начертательной геометрии помогает развивать у человека пространственное мышление, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

## 1.2. Способы проецирования

В начертательной геометрии изображения получают методом проецирования[1]. Идея метода показана на примере проецирования точки (рис. 1.1).

Пусть в пространстве произвольно расположена точка А – объект проецирования, задано направление проецирования и задана точка S – центр проецирования. За плоскость проекций (картинную плоскость принята

[1] От лат. projection – бросание вперёд [3,4].

плоскость $\pi_1$). Через точки S и A на прямой ℓ проведём проецирующую прямую SA и найдём $A_1$ – точку пересечения проецирующей прямой SA с плоскостью проекций $\pi_1$: $A_1 = SA \cap \pi_1$. Точка $A_1$ – проекция точки A, построенная из центра S на плоскости проекций $\pi_1$. Плоскость, проходящая через точки S и A, называется проецирующей.

*Проекция любой геометрической фигуры* есть множество проекций всех ее точек на соответствующие плоскости проекций. Направление проецирующей прямой ℓ и положение плоскости $\pi_1$ определяют *аппарат проецирования*.

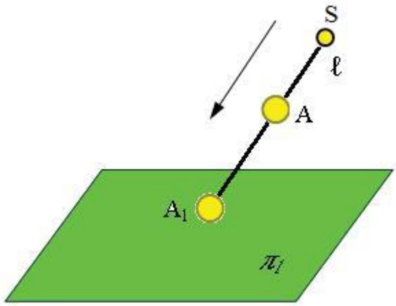



Рис. 1.1. Проекция точки A на плоскость проекций $\pi_1$

*Центральным проецированием* называется такое проецирование, при котором все проецирующие лучи исходят из одной точки S – цен-тра проецирования (рис. 1.2).

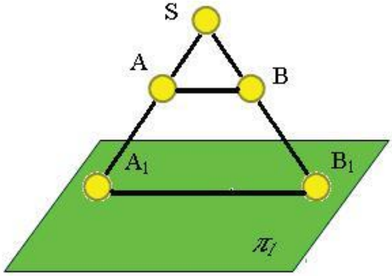



Рис. 1.2. Пример центрального проецирования

*Параллельное проецирование* является частным случаем центрального, когда центр проецирования удален в бесконечность от плоскости проекций $\pi_1$ и все проецирующие прямые параллельны, заданному направлению проецирования S (рис. 1.3).

При заданном аппарате проецирования каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций.

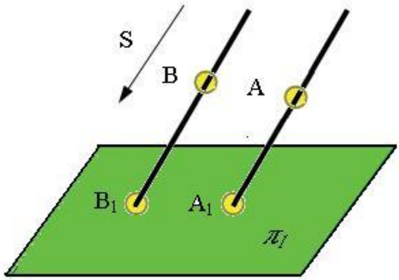



Рис. 1.3. Пример параллельного проецирования

Одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве. Действительно, проекции $A_1$ может соответствовать бесчисленное множество точек A', A'', …, расположенных на проецирующей прямой $\ell$ (рис. 1.4).

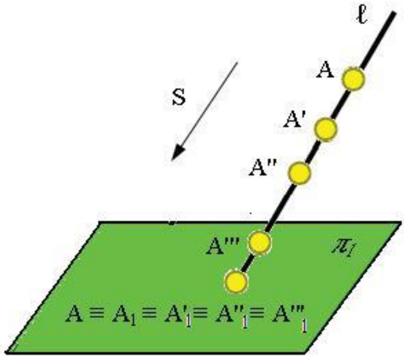



Рис. 1.4. Пример расположения множества точек на проецирующей прямой

*Для определения положения точки в пространстве при любом аппарате проецирования необходимо иметь две ее проекции, полученных при двух различных направлениях проецирования (или при двух различных центрах проецирования).*

Из рис. 1.5 видно, что две проекции точки А ($A_1$ и $A_2$), полученные при двух направлениях проецирования $S_1$ и $S_2$ , определяют единственным образом положение самой точки А в пространстве – как пересечение проецирующих прямых $\ell_1$ и $\ell_2$, проведенных из проекций $A_1$ и $A_2$ параллельно направлениям проецирования $S_1$ и $S_2$.

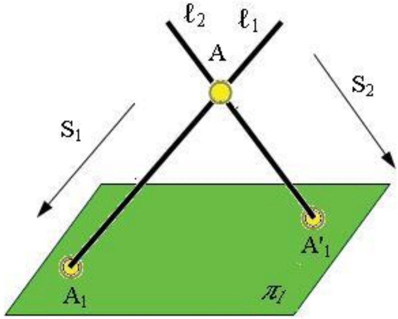



Рис. 1.5. Определение положения точки А в пространстве

## 1.3. Инвариантные свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры в общем случае проецируются на плоскость проекций с искажением. Проекции не сохраняют линейные и угловые величины оригинала. Характер искажений зависит от положения геометрической фигуры в пространстве, от аппарата проецирова-ния и от положения плоскости проекций. Однако некоторые геометрические свойства фигур остаются неизменными в процессе проецирования. Такие свойства геометрических фигур называются независимыми или инвариантными для данного аппарата проецирования.

Рассмотрим основные инвариантные свойства параллельного проецирования.

*1. Проекция точки есть точка*

Это очевидно из самого определения проекции как точка пересечения проецирующей прямой с плоскостью.

*2. Проекция прямой есть прямая* (рис. 1.6)

Все проецирующие прямые, проходящие через точки прямой **a,** параллельно направлению проецирования S, образуют проецирующую, или лучевую, плоскость **α.**

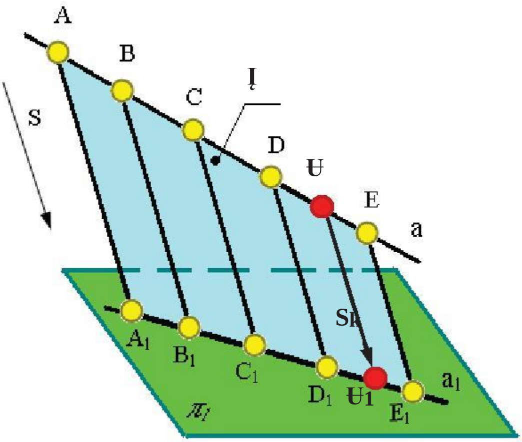



Рис. 1.6. Инвариантные свойства 2, 3, 4

Проекция прямой **a** на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ определяется как линия пересечения этой лучевой плоскости **α** с плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$, т. е. прямая.

*3. Если точка К принадлежит прямой а, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой* (рис. 1.6).

Это свойство следует непосредственно из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех точек.

Если точка **К** принадлежит прямой **a** и плоскости **α,** то и проецирующий луч $\mathbf{S_K}$ принадлежит плоскости **α**. Следовательно, этот луч пересечет плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ в линии пересечения плоскостей **α** и $\boldsymbol{\pi_1}$, т. е. в точке $\mathbf{K_1}$, принадлежащей проекции прямой $\mathbf{a_1}$.

*4. Если точка **К** делит отрезок **AD** в отношении **m:n** то и проек-ции этой точки делят в таком же отношении проекции этого отрезка*
(рис. 1.6):

Фигура $AEE_1A_1$ – трапеция. Прямая $KK_1$ параллельна боковым сторонам трапеции $AA_1$ и $EE_1$, следовательно делит ее стороны AE и $A_1E_1$ на пропорциональные части.

5. *Проекция точки пересечения прямых есть точка пересечения проекций этих прямых* (рис. 1.7). Действительно, точка К принадлежит одновременно прямым АВ и CD. По третьему инвариантному свойству проекция этой точки $K_1$ должна принадлежать проекциям этих прямых, т. е. должна являться точкой пересечения этих проекций.

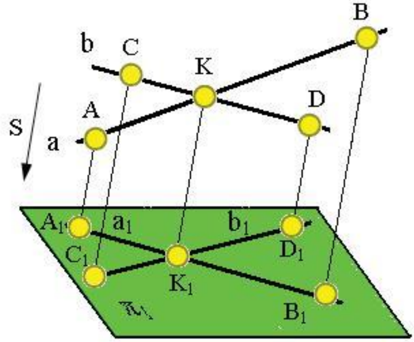



Рис. 1.7. Пример инвариантного свойства 5

6. *Проекции параллельных прямых параллельны* (рис. 1.8)

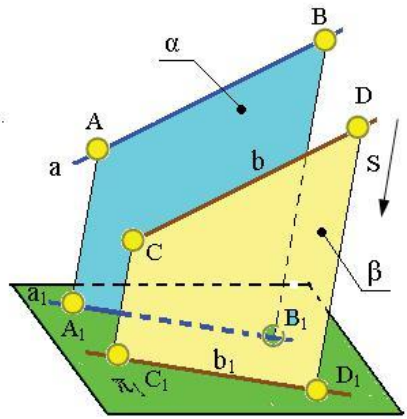



Рис. 1.8. Пример инвариантного свойства 6

Лучевые плоскости **α** и **β**, проходят через параллельные прямые AB и CD. Они параллельны, так как две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости ($AB \parallel CD$ и $AA \parallel CC_1$). Но две параллельные плоскости пересекают-ся с третьей по параллельным прямым, следовательно, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

*7. Плоский многоугольник в общем случае проецируется в многоугольник с тем же числом вершин.*

Исключение составляет многоугольник (плоская ломаная или кривая линия) расположенный в проецирующей (лучевой) плоскости. Такой многоугольник проецируется в прямую линию (рис. 1. 9).

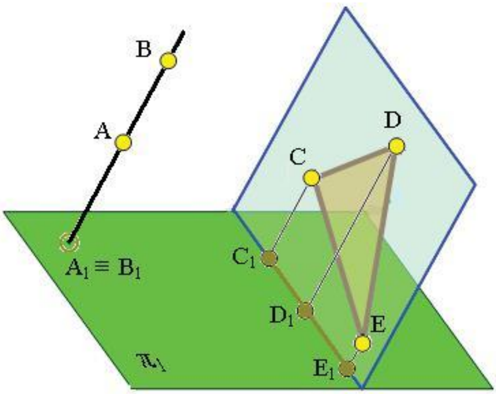



Рис. 1.9. Примеры инвариантных свойств 7, 8

*8. Прямая, параллельная направлению проецирования, проецирует-ся на плоскость в точку* (рис. 1.9)

*9. Проекция плоской фигуры, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна этой фигуре* (рис. 1.10).

Две фигуры называются **конгруэнтными**, или **равными**, если существует изометрия плоскости, которая переводит фигуры одну в другую. Например, в евклидовой геометрии две фигуры называются конгруэнтными, если одна из них может быть переведена в другую сдвигом, вращением и зеркальным отображением.

**Следствия этого инвариантного свойства следующие:**

1. Проекция отрезка прямой, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна и параллельна самому отрезку (рис. 1.10):

2. Проекция угла, стороны которого параллельны плоскости проекций, конгруэнтна этому углу (рис. 1.10).

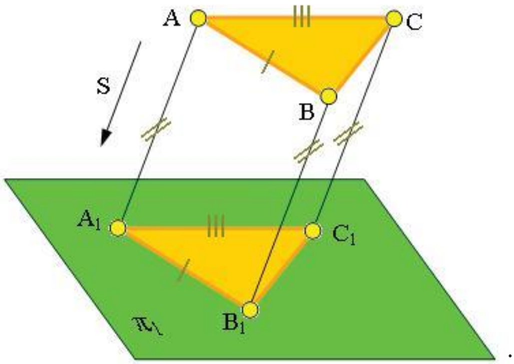



Рис. 1.10. Пример инвариантного свойства 9 и его следствий

## 1.4. Ортогональное проецирование

*Ортогональное проецирование* является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования (ортогонально) к плоскости проекций $S \perp \pi_1$ (рис. 1.11). В этом случае проекция изображаемого объекта называется ортогональной.

Ортогональное проецирование находит широкое применение в инженерной практике для изображения геометрических фигур на плоскости, т. к. обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием к которым можно отнести:

а) простоту графических построений для определения ортогональных проекций точек;

б) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Указанные преимущества обеспечили широкое применение ортогонального проецирования в технике, в частности для составления машиностроительных чертежей.

Для ортогонального проецирования справедливы все девять инвариантных свойств параллельного проецирования, рассмотренных выше. Кроме того, необходимо отметить еще одно, десятое, инвариантное свой-ство, которое справедливо только для ортогонального проецирования.

10. Е*сли хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоско-сти проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецирует-ся без искажения* (рис. 1.11).

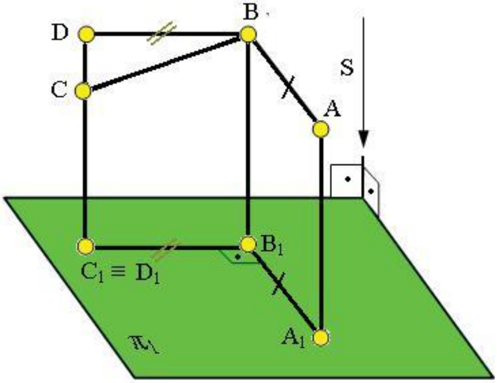



Рис. 1.11. Ортогональная проекция прямого угла

На рис. 1.11 показан прямой угол ABD, обе стороны которого параллельны плоскости проекций $\pi_1$. По инвариантному свойству 9 этот угол проецируется на плоскость $\pi_1$ без искажения, т. е. $\angle A_1B_1D_1=90°$.

Возьмем на проецирующем луче $DD_1$ произвольную точку C, тогда полученный $\angle ABC$ будет прямым, т. к. $AB \perp BB_1DD_1$.

Проекцией этого прямого угла ABC, у которого только одна сторона AB параллельна плоскости проекций $\pi_1$, будет прямой угол $A_1B_1D_1$.

## 1.5. Система трех плоскостей проекций. Эпюр Монжа

Все пространственные геометрические фигуры могут быть ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координатных осей – системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 1.12).

Эти координатные плоскости обозначаются:

1. Горизонтальная плоскость проекций – $\pi_1$;
2. Фронтальная плоскость проекций – $\pi_2$;
3. Профильная плоскость проекций – $\pi_3$.

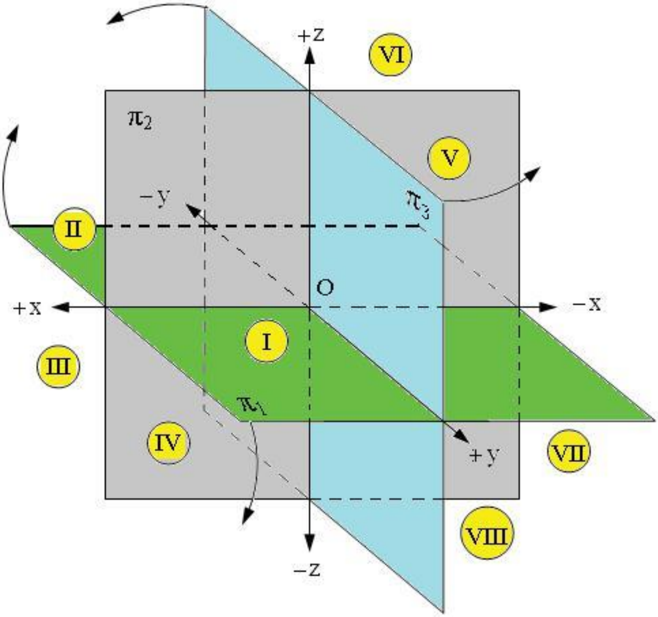



Рис. 1.12. Изображение системы трех плоскостей проекций

Линии пересечения этих плоскостей образуют координатные оси: ось абсцисс – X; ось ординат – Y; ось аппликат – Z. Точка пересечения координатных осей принимается за начало координат и обозначается буквой О.

Положительными направлениями осей считают: для оси x – влево от начала координат, для оси Y – в сторону зрителя от плоскости $\pi_2$, для оси z – вверх от плоскости $\pi_1$; противоположные направления считают отрицательными.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем рассматривать только часть пространства, расположенную влево от профильной плоскости проекций $\pi_3$.

При таком допущении три координатные плоскости проекций образуют четыре пространственных угла – октанта (в общем случае – 8 октантов).

Каждый из октантов представляет часть пространства, в котором располагаются геометрические элементы (точки, прямые, плоскости и поверхности), определяемые соответствующими размерами. Положе-ние этих элементов в пространстве определяется координатами в вы-бранной системе. Система трёхмерная, поэтому каждая точка простран-ства имеет три координаты – x,y,z.

*Координатой* считается кратчайшее расстояние от точки до соответствующей плоскости проекций.

Из рис. 1.12 видно, что ось абсцисс X делит горизонтальную плоскость проекций $\pi_1$ на две части: переднюю полу $\pi_1$ (оси X и Y) и заднюю полу $\pi_1$ (оси X и -Y).

Ось абсцисс X делит фронтальную плоскость проекций $\pi_2$ также на две части: верхнюю полу $\pi_2$ (оси X и Z) и нижнюю полу $\pi_2$ (оси X и -Z).

Оси ординат Y и аппликат Z делят профильную плоскость проек-ций $\pi_3$ на четыре части:

1. Верхнюю переднюю полу $\pi_3$ (оси Y и Z)
2. Верхнюю заднюю полу $\pi_3$ (оси -Y и Z)
3. Нижнюю переднюю полу $\pi_3$ (оси Y и -Z)
4. Нижнюю заднюю полу $\pi_3$ (оси -Y и -Z)

Для того, чтобы получить плоскую (двухмерную) модель пространственных координатных плоскостей проекций, горизонтальную $\pi_1$ и профильную $\pi_3$ плоскости совмещают с фронтальной $\pi_2$ в том порядке как это показано стрелками на рис. 1.12.

При этом горизонтальная плоскость проекций $\pi_1$ вращается вокруг оси X на 90°, а профильная плоскость проекций $\pi_3$ вращается вокруг оси Z также на 90° (направление вращения показано на рис. 1.12).

Полученное таким образом совмещение трех плоскостей проекций (рис. 1.13) является плоской моделью системы трех пространственных координатных плоскостей.

Для построения плоской модели пространственной геометрической фигуры каждая ее точка проецируется ортогонально на плоскости проекций $\pi_1$, $\pi_2$ и $\pi_3$, которые затем совмещаются в одну плоскость. Полученная таким образом плоская модель пространственной геометрической фигуры называется эпюром[2] Монжа или комплексным чертежом Монжа [1,2,5].

Обычно, такая модель даёт три проекции: фронтальную, горизонтальную и профильную.

[2] **Эпю́р** (фр. epure – чертёж) – чертёж, на котором пространственная фигура изображена методом нескольких (по ГОСТ трёх, но не всегда) плоскостей [4].

## *Порядок построения эпюра точки, расположенной в первом октанте.*

На рис. 1.13 изображена пространственная точка **A**, координаты которой (**x**, **y**, **z**) показывают величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций.

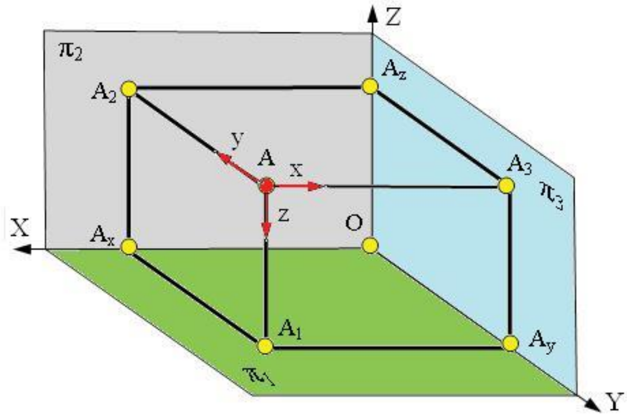



Рис. 1.13. Пространственная модель точки **A**

Для того чтобы получить ортогональные проекции точки **A**, необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций.

Точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостями проекций образуют проекции точки **A**:

**$A_1$** – горизонтальную проекцию точки;

**$A_2$** – фронтальную проекцию точки; **$A_3$**
– профильную проекцию точки.

На рис. 1.14 плоскости проекций **$\pi_1$** и **$\pi_3$** совмещены с плоскостью чертежа (с плоскостью проекции **$\pi_2$**), а вместе с ними совмещены с плоскостью чертежа и проекции точки **A** (**$A_1$**, **$A_2$**, **$A_3$**) и, таким образом, получена плоскостная модель координатных плоскостей проекций и плоскостная модель пространственной точки **A** – её эпюр. Положение проекций точки А на эпюре однозначно определяется ее тремя координатами (рис. 1.14).

На рис. 1.13 и рис. 1.14 также видно, что на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси

**X**, а также фронтальная и профильная проекции – на одном перпендикуляре к оси **Z**:

**$A_1A_2 \perp X$, $A_2A_3 \perp Z$.**

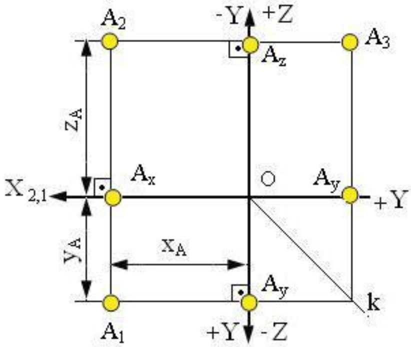



Рис. 1.14. Эпюр точки А

Из рис. 1.12 видно, что точки, расположенные в различных октантах, имеют определенные знаки координат.

В таблице приведены знаки координат точек, расположенных в различных октантах.

**Таблица знаков координат**

| **Октанты** | **Знаки координат** | | |
|---|---|---|---|
| | X | Y | Z |
| 1 | + | + | + |
| 2 | + | - | + |
| 3 | + | - | - |
| 4 | + | + | - |
| 5 | - | + | + |
| 6 | - | - | + |
| 7 | - | - | - |
| 8 | - | + | - |

## Вопросы для самоконтроля

*1. В чём заключается идея метода проецирования?*

*2. В чём сущность построения эпюра точки?*

*3. В чём сущность центрального проецирования?*

*4. Каковы основные свойства центрального проецирования?*

*5. В чём сущность параллельного проецирования?*

*6. Каковы основные свойства параллельного проецирования?*

*7. В чём сущность ортогонального проецирования?*

*8. Каковы основные свойства ортогонального проецирования?*

*9. Какие координаты точки однозначно определяют ее положение* в *пространстве?*

*10. Как формулируется теорема о проецировании прямого угла?*

*11. Чем однозначно определяется положение проекций точки на эпюре?*

*12. Как выполняется построение плоской модели пространственной геометрической фигуры?*

*13. Как можно построить профильную проекцию точки?*

*14. Какие координаты точки однозначно определяют ее положение* в *пространстве?*

*15. Сколько необходимо иметь проекций точки для определения её положения в пространстве?*

# 2. ТОЧКА, ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

## 2.1. Точка. Способы задания

Точка как математическое понятие не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нуль мерным объектом[1], то говорить о его проецировании бессмысленно.

В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку будем принимать шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о её проекциях.

Если точку A, произвольно расположенную в пространстве (рис. 1.14), ортогонально спроецировать на каждую из плоскостей проекций, то в результате проецирования получим $\mathbf{A_1}$ – горизонтальную проекцию точки $\mathbf{A(A_1 \perp \pi_1)}$, $\mathbf{A_2}$ – фронтальную проекцию точки $A(A_2 \perp \pi_2)$ и $A_3$ – про-фильную проекцию точки $A(A_3 \perp \pi_3)$. Линии $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$ – проециру-ющие прямые. Они перпендикулярны соответствующим плоскостям проекций $(AA_1 \perp \pi_1)$, $(AA_2 \perp \pi_2)$, $(AA_3 \perp \pi_3)$. Линия $A_2A_1$ называется ли-нией проекционной связи.

Так как проецирование ортогональное и $\pi_1 \perp \pi_2$, значит на базе тео-рем стереометрии можно доказать, что фигура $AA_2A_xA_1$ – прямоуголь-ник и, следовательно, согласно теореме о проецировании прямого угла $A_1A_x \perp x$, и $A_2A_x \perp x$. В рассматриваемом случае горизонтальная проекция точки A имеет координаты x и y A(x,y), фронтальная проекция точки A имеет координаты x и z A(x,z), следовательно, *по двум любым проекциям точки можно определить её положение в пространстве, т.к. у двух проекций имеются все три пространственных координаты точки*.

Если точка принадлежит хотя бы одной плоскости проекций, то она занимает частное положение относительно плоскостей проекций. Если

[1] **То́чка** – абстрактный объект в пространстве, не имеющий никаких измеримых характеристик (нульмерный объект).

точка не принадлежит ни одной плоскости проекций, она занимает общее положение.

## 2.2. Прямая. Свойства прямой линии на комплексном чертеже

Положение в пространстве любой прямой линии однозначно может быть определено заданием двух её точек. Комплексный чертеж прямой может быть представлен в виде комплексного чертежа двух точек прямой (рис. 2.1.б-в). Ещё комплексный чертёж прямой может быть представлен двумя проекциями прямой (рис. 2.1. а).

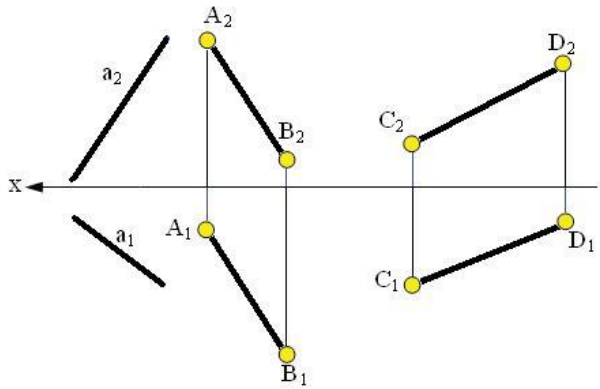



Рис. 2.1. Прямые общего положения

Во всех этих случаях при реконструкции в пространстве прямая линия определяется однозначно и имеет следующие основные свойства:

1. *Для деления данного отрезка в данном отношении достаточно разделить в этом отношении одну из проекций данного отрезка, а затем спроецировать делящую точку на другую проекцию отрезка.*

Прямая $\mathbf{a}_1$ – горизонтальная проекция прямой **а** на горизонтальную плоскость проекций $\pi_1$ ($a_1 \cap \pi_1$).

Прямая $\mathbf{a}_2$ – фронтальная проекция прямой **а** на фронтальную плоскость проекций $\pi_2$ ($\mathbf{a}_2 \cap \pi_2$).

Прямая $\mathbf{a}_3$ – профильная проекция прямой **а** на профильную плоскость проекций $\pi_3$ ($a_3 \cap \pi_3$).

2. *Если точка принадлежит прямой, то все её проекции принадлежат проекциям прямой.*

3. *Если прямая не параллельна и не перпендикуляра ни одной из плоскостей проекций, её называют прямой общего положения* (рис. 2.1.).

4. *В отличие от прямых частного положения, любой отрезок прямой общего положения проецируется на основные плоскости проекций с искажением своей истинной величины.*

## 2.3. Положение прямой относительно плоскостей проекций. Частные положения прямой линии

Основываясь на свойствах прямой линии(3 и 4), описанных в п.2.2, следует отметить, что особый интерес в начертательной геометрии представляют прямые частного положения. К прямым частного положения относятся прямые, расположенные определенным образом относительно плоскостей проекций: параллельные, перпендикулярные и принадлежащие плоскостям проекций.

Линии, параллельные плоскостям проекций называются линиями *уровня*. Рассмотрим изображения на эпюре и отметим основные свойства этих прямых.

### *Прямые, параллельные плоскостям проекций.*

а) горизонтальная прямая **h** (рис. 2.2) – *горизонталь*.

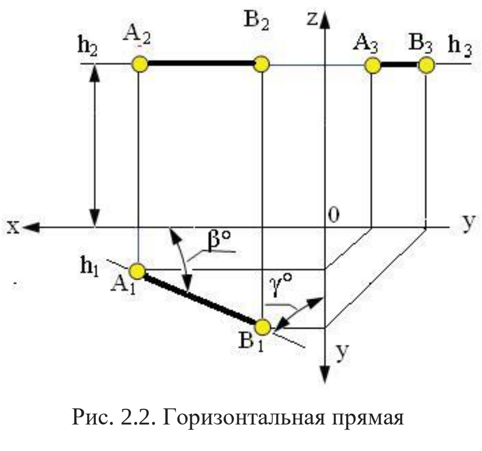



Рис. 2.2. Горизонтальная прямая

Горизонтальная прямая – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций $\pi_1$. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций $\pi_1$ (координаты Z всех точек прямой одинаковы), то фронтальная и профильная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям X и Y. На плоскость проекций $\pi_1$ проецируются без искажения отрезок прямой AB ($A_1B_1$ = AB) и углы наклона прямой к плоскостям проекций $\pi_2$ и $\pi_3$ (углы $\beta^0$ и $\gamma^0$).

б) фронтальная прямая f (рис. 2.3) – *фронталь*.

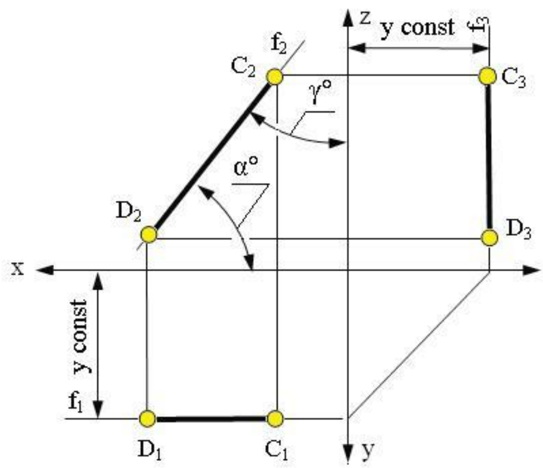



Рис. 2.3. Изображение фронтальной прямой

Фронтальная прямая – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций $\pi_2$. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций $\pi_2$ (координаты Y всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и профильная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям X и Z. На плоскость проекций $\pi_2$ проецируются без искажений отрезок этой прямой CD ($C_2D_2$ = CD) и углы наклона прямой к плоскостям проекций $\pi_1$ и $\pi_3$ (углы $\alpha°$ и $\gamma°$).

в) профильная прямая p (рис. 2.4)

Профильная прямая – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций $\pi_3$ . Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций $\pi_3$ (координаты X всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и фронтальная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям Y и Z. На плоскость проекций $\pi_3$ проецируется без искажения отрезок этой прямой EF ($E_3F_3$ = EF) и углы наклона прямой к плоскостям проекций $\pi_1$ и $\pi_2$ (углы α° и β°).

Кроме прямых линий, рассмотренных выше, на комплексном чертеже, также, изображают прямые, принадлежащие плоскостям проекций. Такие прямые представляют частные случаи горизонтальных, фронтальных и профильных прямых. Характерным признаком, таких пря-мых на чертеже, является принадлежность одной из проекций этих пря-мых соответствующей оси.

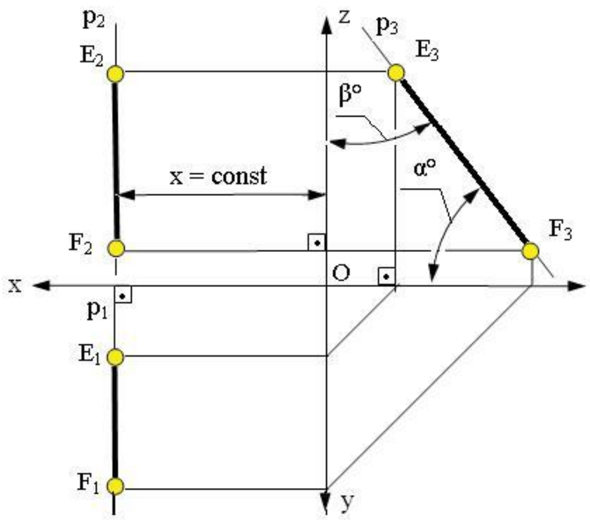



Рис. 2.4. Изображение профильной прямой

### *Прямые, принадлежащие плоскостям проекций*

На рис. 2.5 изображена прямая AB, которая принадлежит горизонтальной плоскости проекций $AB \subset \pi_1$ (частный случай горизонтальной прямой Z=0), а фронтальная проекция этой прямой $A_2B_2$ принадлежит оси x ($A_2B_2 \subset X$). При этом, на рисунке показаны углы наклона прямой AB к фронтальной (β°) и профильной (γ°) плоскостям проекций.

На рис. 2.6. показана прямая, принадлежащая фронтальной плоскости проекций (частный случай фронтальной прямой Y=0), а на рис. 2.7 – профильной плоскости проекций (частный случай профильной прямой X=0) соответственно.

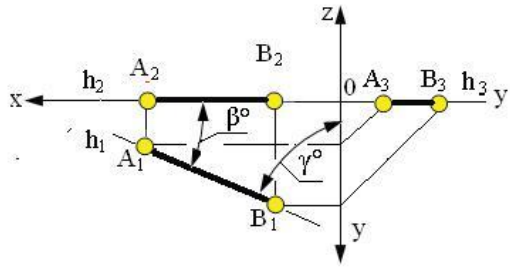
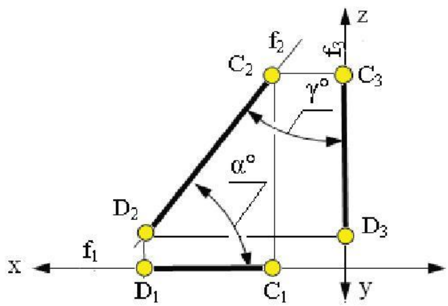



Рис. 2.5. Изображение прямой, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций



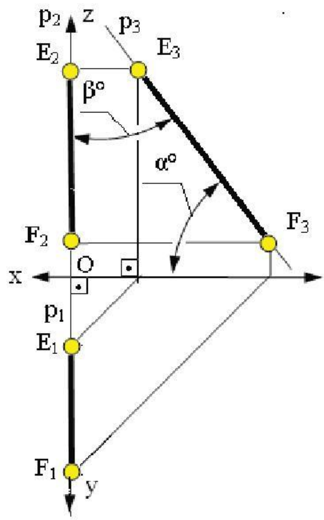




Рис. 2.6. Изображение прямой, принадлежащей фронтальной плоскости проекций

Рис. 2.7. Изображение прямой, принадлежащей профильной плоскости проекций

## *Прямые линии, перпендикулярные плоскостям проекций. Проецирующие прямые*

Прямую, параллельную направлению проецирования и перпендикулярные соответствующим плоскостям проекций называют проецирующей. При прямоугольном проецировании проецирующая прямая параллельна двум плоскостям проекций и перпендикулярна одной.

Если прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проек-ций, то она называется *горизонтально -проецирующей* и все её точки проецируются на эту плоскость в точку.

На рис. 2.8 представлена, прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

В этом случае во фронтальной плоскости проекций$\pi_2$ проекция пря-мой $A_2B_2$ перпендикулярна оси X, в профильной плоскости проекций $\pi_3$, $A_3B_3$ – параллельна оси Z, а в горизонтальной плоскости проекций $A_1 \equiv B_1$.

Рассматриваемая прямая расположена в первом октанте и все координаты прямой положительные

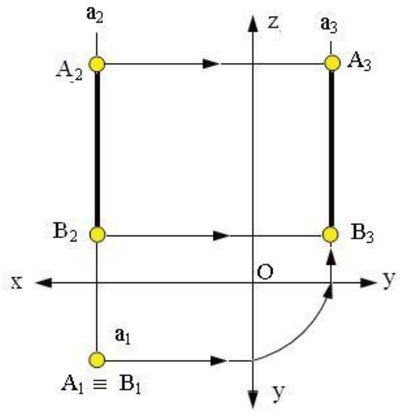



Рис. 2.8. Изображение прямой линии (горизонтально-проецирующей), перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций

На рис. 2.9 изображена, прямая, перпендикулярная фронтальной пло-скости проекций.

В этом случае в горизонтальной плоскости проекций $C_1D_1$ перпендикулярна оси X, в профильной плоскости проекций $C_3D_3$ – параллельна оси Y, а во фронтальной плоскости проекций $C_2 \equiv D_2$.

Прямая линия, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется *фронтально-проецирующей прямой* и она проецируется на плоскость $\pi_2$ в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси X (рис. 2.9).

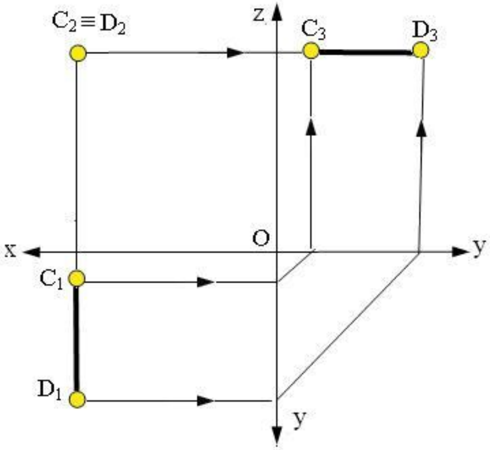



Рис. 2.9. Изображение прямой линии (фронтально-проецирующей), перпендикулярной фронтальной плоскости проекций

Прямая линия, перпендикулярная профильной плоскости (рис. 2.10) проекций называется *профильно-проецирующей*.

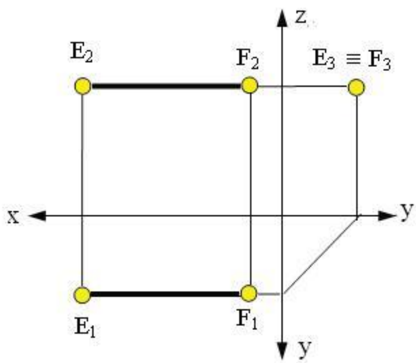



Рис. 2.10. Изображение прямой линии перпендикулярной профильной плоскости (профильно-проецирующей) проекций

Эта прямая проецируется на плоскость $\pi_3$ в точку, а ее фронтальная проекция $E_2F_2$ перпендикулярна оси Z.

Рассмотренные прямые, являются частными случаями фронтальной и горизонтальной прямых соответственно.

## 2.4. Следы прямой линии

*Следом прямой линии* называется точка её пересечения с плоскостью проекций. На комплексном чертеже существуют три следа прямой линии. Горизонтальный (H), фронтальный (F) и профильный (P).Следы прямой являются точками частного положения и $H \subset \pi_1$, $F \subset \pi_2$, $P \subset \pi_3$.

В системе двух плоскостей проекций $\pi_1$ и $\pi_2$ прямая линия в общем случае имеет два следа (рис. 2.11 а):

1. Горизонтальный след прямой линии H ($H_1$, $H_2$) – точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций $AB \cap \pi_1$; Фронтальный след прямой линии F ($F_1$, $F_2$) – точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций $AB \cap \pi_2$.

2. В системе трёх плоскостей проекций $\pi_1$,$\pi_2$ и $\pi_3$ у прямой линии общего положения появляется третий след – профильный (рис. 2.11. в).

Профильный след прямой линии P ($P_2$, $P_3$) – точка пересечения прямой ***b*** с фронтальной плоскостью проекций $\pi_3$.

Рассмотрим правила нахождения горизонтального и фронтального следов прямой линии в двухкартинной системе плоскостей проекций (рис. 2.11, а).

Для нахождения горизонтального следа прямой линии ***a*** необходимо:

1) продолжить фронтальную проекцию прямой $\boldsymbol{a_2}$ **,** ограниченной отрезком AB, до пересечения с осью X (получим точку $H_X \equiv H_2$); 2) восстановить перпендикуляр в точке $H_X$ к оси X (провести линию проекционной связи перпендикулярную к оси X); 3) продолжить горизонтальную проекцию прямой $\boldsymbol{a_1}$ до пересечения с перпендикуляром; 4) полученная точка пересечения и будет являться горизонтальным следом $H \equiv H_1$ прямой ***a***.

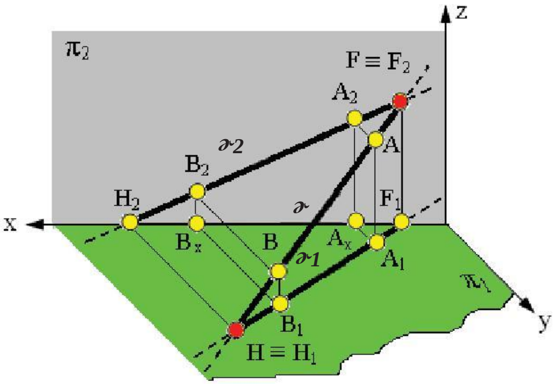
Для нахождения фронтального следа прямой ***a*** необходимо:

1) продолжить горизонтальную проекцию прямой $\boldsymbol{a_1}$ до пересечения с осью X (точка $F_X \equiv F_1$);

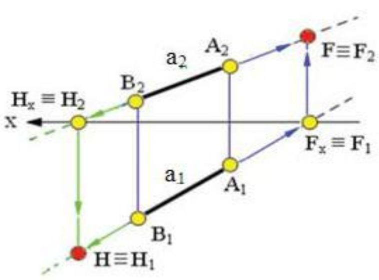
2) восстановить перпендикуляр в точке $F_X$ к оси X;

3) продолжить фронтальную проекцию прямой $\boldsymbol{a_2}$ до пересечения с перпендикуляром;

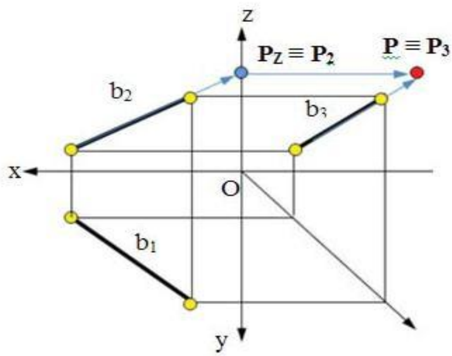
4) полученная точка пересечения является фронтальным следом F ≡ $F_2$ прямой ***a*.**




а




б




в

Рис. 2.11. Изображение следов прямой линии: а – в пространстве; б, в – на комплексном чертеже

Для нахождения профильного следа прямой ***b*** необходимо использовать ось Z (на рис. 2.11. в):

1) продолжить фронтальную проекцию прямой ***b*₂** до пересечения с осью Z (точка $P_Z \equiv P_2$);

2) восстановить перпендикуляр в точке $P_Z$ к оси Z;

3) продолжить профильную проекцию прямой $\boldsymbol{b_3}$ до пересечения с перпендикуляром;

4) полученная точка пересечения является профильным следом $P \equiv P_3$ прямой $\boldsymbol{b}$.

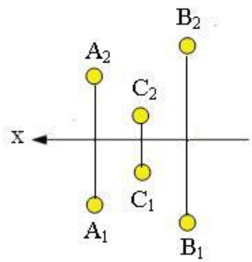
В начертательной геометрии считается, что наблюдатель расположен в первом пространственном углу на бесконечном расстоянии от плоскостей проекций, поэтому видимыми геометрическими фигурами будут только те, которые расположены в первом октанте.

Проекции этих фигур в ортогональных и аксонометрических проекциях показываются сплошными линиями. Фигуры, расположенные в других пространственных углах, не видны наблюдателю, и их проекции показываются штриховыми линиями.

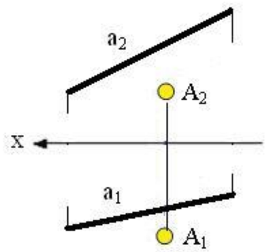
## 2.5. Плоскость. Способы задания плоскости на комплексном чертеже

Плоскость, простейшая поверхность [5]. Понятие плоскость (подобно точке и прямой) принадлежит к основным понятиям геометрии. Плоскость обладает свойством, что любая прямая, соединяющая две точки плоскости, принадлежит плоскости.

Плоскость на комплексном чертеже однозначно могут определить три точки не расположенные на одной прямой (рис. 2.12 а), прямая и точка, не принадлежащая ей (рис. 2.12 б).



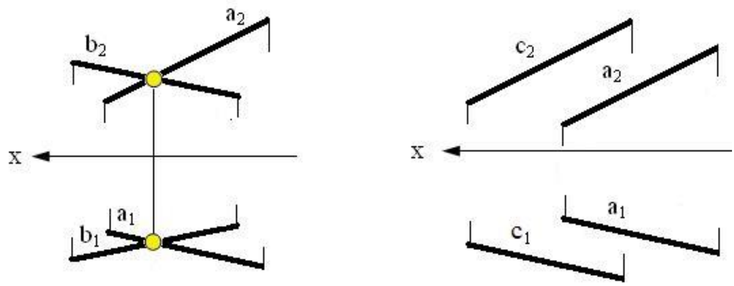

а




б

Рис. 2.12. Изображение плоскости, заданной: а – тремя точками; б – точкой и прямой линией

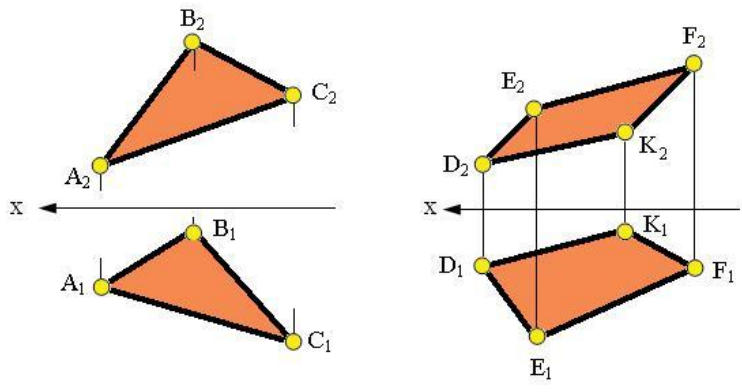
Плоскость на комплексном чертеже можно задать двумя пересекающимися прямыми (рис. 2.13 а) или двумя параллельными прямыми (рис. 2.13 б).




а б

Рис. 2.13.Изображение плоскости, заданной:
а – двумя пересекающимися прямыми; б – двумя параллельными прямыми

На комплексном чертеже плоскость может быть задана плоской фигурой. На рис. 2.14. а изображён комплексный чертёж, на котором представлена плоскость, заданная плоскостью треугольника. На рис. 2.14 б представлен комплексный чертёж, на котором изображена плоскость, заданная многоугольником.




а б

Рис. 2.14. Изображение плоскости заданной:
а – плоскостью треугольника; б – плоскостью многоугольника

В начертательной геометрии существует ещё один способ задания плоскости на комплексном чертеже – следами. Этот способ обладает преимуществом перед другими вариантами ее изображения на эпюре потому, что сохраняется наглядность изображения и требуется указать только две прямые вместо четырех или шести.

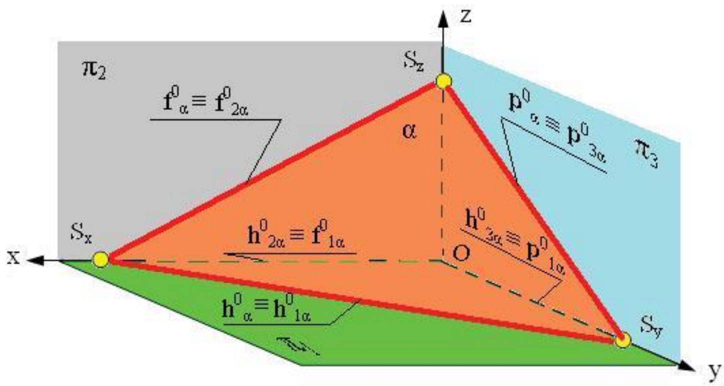



Рис. 2.15. Способ задания плоскости следами плоскости

На рисунке 2.15 показана плоскость общего положения, заданная следами $f^0$, $h^0$, $p^0$, которые расположены, по отношению к плоскостям проекций, под углами, отличными от 90°, но при этом они параллельны соответствующим плоскостям проекций и являются частным случаем изображения линий уровня представленной на рисунке плоскости. Это свойство можно использовать при решении геометрических задач. На рассматриваемом рисунке фронтальный след плоскости $\alpha(f^0,h^0,p^0)$ параллелен фронтальной проекции фронтали этой плоскости $f^0 \parallel f_2$, горизонтальный след плоскости $\alpha(f^0,h^0,p^0)$ параллелен горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости $h^0 \parallel h_1$,профильный след плоскости $\alpha(f^0,h^0,p^0)$ параллелен профильной проекции профильной прямой этой плоскости $p^0 \parallel p_3$.

## 2.6. Общее и частные положения плоскостей в пространстве

*Плоскость общего положения* – это плоскость, которая занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций – произвольные, но отличные от 0° и 90°) (рис. 2.15, 2.19, 2.20). Во всех остальных случаях плоскость занимает частное положение относительно плоскостей проекций. Плоскости частного положения можно разделить на плоскости проецирующие (перпендикулярные) и плоскости уровня (параллельные) плоскостям проекций.

На комплексном чертеже следы плоскости общего положения составляют с осью плоскостей проекций также произвольные углы. Рассмотрим на комплексном чертеже изображение и свойства плоскостей частного положения: плоскости, перпендикулярные и параллельные плоскостям проекции.

### *Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций (проецирующие плоскости).*

1. Горизонтально-проецирующая плоскость а $\perp \pi_1$.

Плоскость **α**, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции $\pi_1$, называется горизонтально-проецирующей (рис. 2.16).

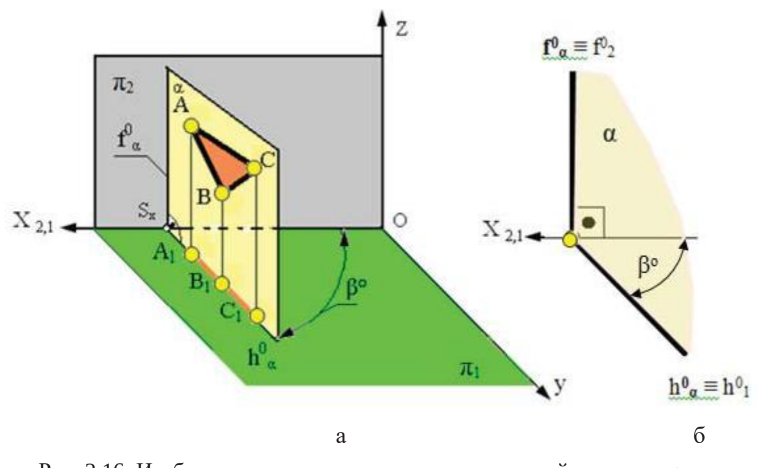



Рис. 2.16. Изображение горизонтально-проецирующей плоскости: а – в пространстве; б – на комплексном чертеже

*Основным свойством горизонтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на $\pi_1$ в прямую линию (горизонтальный след плоскости $h^0_\alpha$).*

На рисунке (2.16. а) показан угол β°, который определён горизонтальным следом плоскости $h^0_\alpha$ и координатной осью X. Он равен углу наклона плоскости α к плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$. Фронтальный след такой плоскости перпендикулярен оси X ($f^0_\alpha \perp X$).

На рис. 2.16 б изображён комплексный чертёж горизонтально проецирующей плоскости, заданной следами.

2. Фронтально-проецирующая плоскость $\gamma \perp \pi_2$.

Плоскость γ перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $\pi_2$ называется фронтально проецирующей (рис. 2.17).

Основным свойством фронтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на $\pi_2$ в прямую линию (фронтальный след плоскости $f^0_\gamma$).

Угол α°, который составляет фронтальный след плоскости $f^0_\gamma$ с координатной осью X, равен углу наклона плоскости γ к плоскости проекций $\pi_1$.

Горизонтальный след такой плоскости перпендикулярен оси X.

На рис. 2.17 б изображён комплексный чертёж фронтально-проецирующей плоскости, заданной следами.

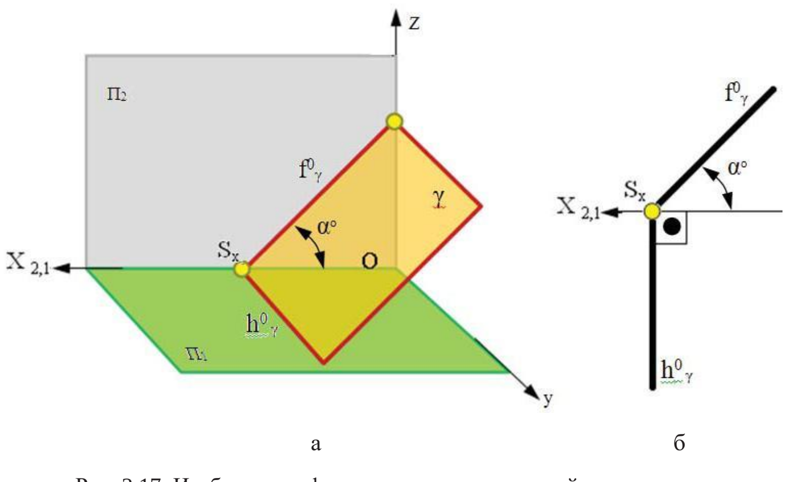



Рис. 2.17. Изображение фронтально-проецирующей плоскости: а – в пространстве; б – на комплексном чертеже следами

## *Плоскости, параллельные плоскостям проекций (плоскости уровня)*

Плоскости, параллельные плоскостям проекций называются плоскостями уровня, и у каждой из них имеется единственный след, который располагается параллельно оси проекций.

1. Горизонтальная плоскость $\gamma \parallel \pi_1$.

Плоскость $\gamma$, параллельная плоскости $\pi_1$, называется горизонтальной (рис. 2.18). Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину ( $A_1B_1C_1$ = ABC, рис. 2.18). Фронтальный след этой плоскости параллелен оси X ($f^0_\gamma \parallel X$).

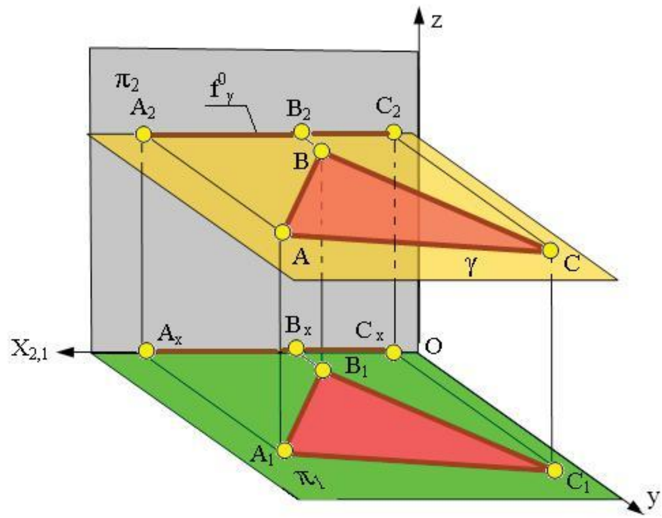



Рис. 2.18. Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций

2. Фронтальная плоскость $\delta \parallel \pi_2$.

Плоскость $\delta$, параллельная плоскости $\pi_2$, называется фронтальной. Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения, т. е. в натуральную величину.

Горизонтальный след фронтальной плоскости параллелен оси X.

**Примечание.** Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, явля-ется частным случаем проецирующих плоскостей.

## 2.7. Следы плоскости

*Следом плоскости* α называется линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекций.

На рис. 2.19. изображена плоскость общего положения **α(m∩n)**, образованная двумя пересекающимися прямыми, проходящими через точки **A** и **B**, расположенными в первом октанте.

Для построения следов плоскости на комплексном чертеже, необходимо помнить, что след плоскости – это линия, значит необходимо найти две точки, через которые пройдет эта линия, т. е. след плоскости. При построении плоскости за такие точки можно принять следы любых прямых линий, принадлежащих этой плоскости.

На рис. 2.19 в горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ её горизонтальный след $\mathbf{h^0_\alpha}$ проходит через горизонтальные следы **H** и **H’** прямых **m** и **n**, а во фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$ – фронтальный след плоскости $\mathbf{f^0_\alpha}$ проходит через фронтальные следы прямых **F** и **F’**.

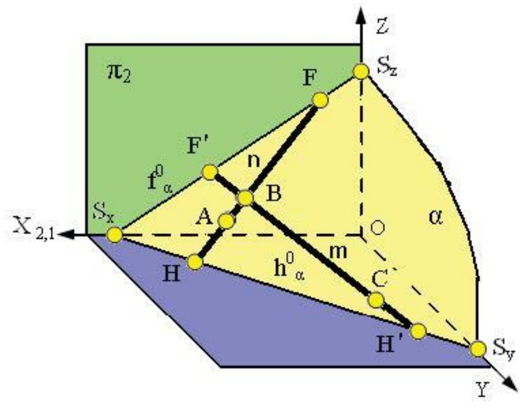



Рис. 2.19. Пример изображения следов плоскости **α** в пространстве

Для нахождения следов плоскости нужно применить правило построения следов прямых линий, который был рассмотрен выше (§2.4). Для построения горизонтального следа плоскости необходимо построить два горизонтальных следа прямых, принадлежащих плоскости, а для построения фронтального следа плоскости – два горизонтальных следа прямых, принадлежащих плоскости **α(m∩n).**

В системе двух плоскостей проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_2}$ плоскость в общем случае имеет два следа: горизонтальный $\mathbf{h_a^0}$ и фронтальный $\mathbf{f_a^0}$, которые являются пересечением плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ соответственно с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций (рис. 2.19, 2.20).

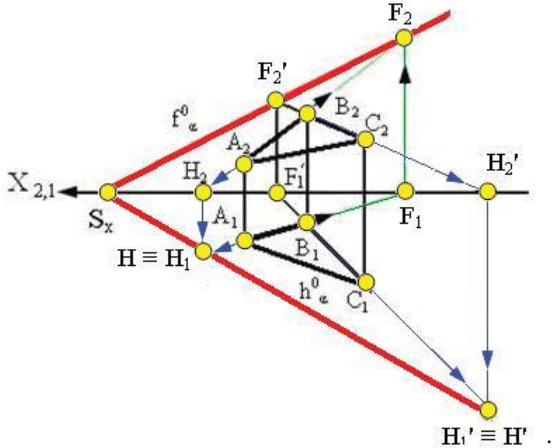



Рис. 2.20. Пример изображения следов плоскости и их алгоритм построения на комплексном чертеже

Точки пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ с координатными осями **X**, **Y**, **Z** называются точками схода следов и обозначаются соответственно $\mathbf{S_x}$**,** $\mathbf{S_y}$, $\mathbf{S_z}$ (рис. 2.16). На рис. 2.20. приведен комплексный чертеж плоскости треугольника АВС и разобран пример построения двух следов этой плоско-сти – горизонтального $\mathbf{h_a^0}$ и фронтального $\mathbf{f_a^0}$**.** Для этого выполнено по-строение горизонтальных следов прямых АВ и ВС, принадлежащих плоскости треугольника. Эти следы обозначены буквами Н и Н'. Реше-ние на рисунке выполнено синими линиями со стрелками. Аналогичное построение выполнено и для фронтального следа линиями зелёного цвета. Порядок построения следов ясен из рисунка.

## Вопросы для самоконтроля

1. *Когда точка принадлежит какой либо плоскости проекций?*
2. *Как может быть задана прямая на комплексном чертеже?*

*3. Какие основные свойства прямой общего положения?*

*4. Какие частные положения относительно плоскостей проекций может занимать прямая линия?*

*5. Когда прямая линия может принадлежать плоскости проекций?*

*6. Какие прямые являются проецирующими?*

*7. Что называется следом прямой?*

*8. Как определяются на комплексном чертеже следы прямой линии?*

*9. Как на комплексном чертеже может быть задана плоскость?*

*10. Какие плоскости являются проецирующими?*

*11. Какие плоскости являются плоскостями уровня?*

*12. Какие плоскости являются плоскостями частного положения?*

*13. Что называется следом плоскости и как он определяется?*

# 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

## 3.1. Определение позиционных задач

*Позиционными задачами* называются такие задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга и плоскостей проекций.

## 3.2. Метод конкурирующих точек

*Метод конкурирующих точек* используется в начертательной геометрии для определения взаимной видимости двух геометрических фигур, с помощью точек, принадлежащих этим фигурам. Рассмотрим пример (рис. 3.1)

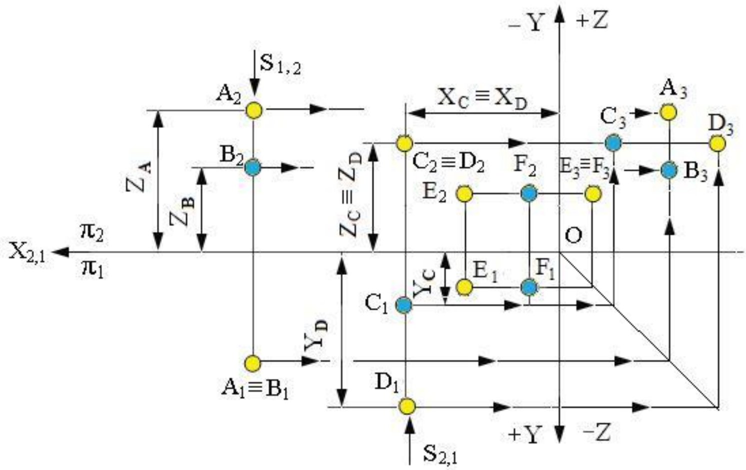



Рис. 3.1. Пример изображения конкурирующих точек

*Конкурирующими точками* называются такие точки пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции. Конкурирующие точки расположены на одной проецирующей прямой.

На рис. 3.1 показаны две пары конкурирующих точек A и B (совпадают горизонтальные проекции $A_1 \equiv B_1$) и C и D (совпадают фронтальные проекции $C_2 \equiv D_2$).

Точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от фронтальной $\pi_2$ и профильной $\pi_3$ плоскостей проекций, имеют одинаковые координаты x и y, а координаты z – разные. Значит точки A и B находятся на разных расстояниях от горизонтальной $\pi_1$ плоскости проекций.

Метод конкурирующих точек заключается в определении взаимной видимости точек (фигур) по их несовпадающим проекциям. При проецировании точек A и B на фронтальную плоскость проекций $\pi_2$, точка A находится выше точки B относительно плоскости и закроет точку B (считается, что наблюдатель смотрит на плоскости проекций из бесконечности и направление луча зрения параллельно проецирующему лучу S). Значит видна будет точка A, у которой координата z больше, чем у точки B ($Z_B > Z_A$).

На плоскости $\pi_2$ видна точка D, так как она находится ближе к наблюдателю (дальше от плоскости $\pi_2$, $Y_D > Y_C$) и закрывает невидимую точку C.

На плоскости $\pi_3$ видна точка E, так как она находится ближе к наблюдателю (дальше от плоскости $\pi_3$, $X_E > X_F$) и закрывает невидимую точку F.

Методом конкурирующих точек пользуются при определении видимости пересекающихся геометрических фигур.

## 3.3. Взаимное положение прямой и точки

Из инвариантного свойства 3 параллельного проецирования следует, что проекции точки K ($K_1$, $K_2$ и $K_3$) принадлежащие прямой **a**, должны принадлежать соответствующим проекциям этой прямой, т. е. *если хотя бы одна проекция точки не принадлежит соответствующей проекции прямой, то эта точка не принадлежит прямой.*

Из инвариантного свойства 4 следует, что проекции точки K ($K_1$, $K_2$ и $K_3$), принадлежащие прямой, делят соответствующие проекции отрезка AB в том же отношении, в каком точка K делит отрезок AB (рис. 3.2).

На рис. 3.3 точки A и B принадлежат прямой a; точки C, D, E находятся вне этой прямой.

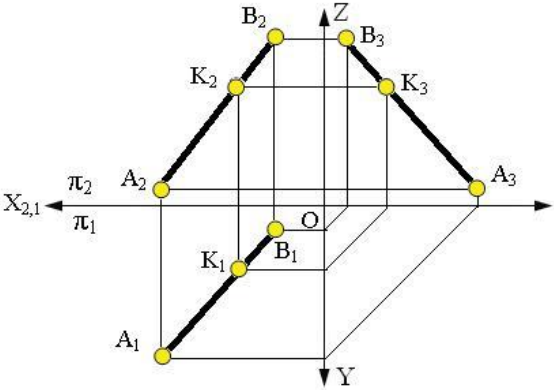



Рис. 3.2. Изображение принадлежности точек A, B, K прямой **a**

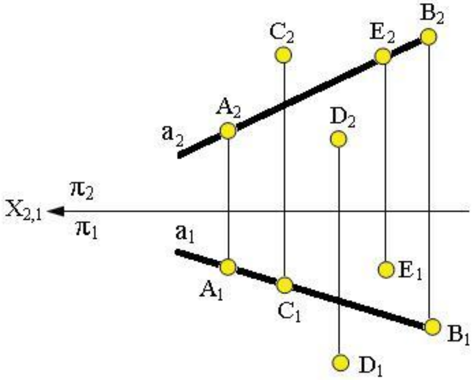



Рис. 3. 3. Пример принадлежности точек прямой

## 3.4. Взаимное положение прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и могут быть параллельны.

*1. Пересекающиеся прямые*

Пересекающимися прямыми называются, такие, прямые, которые имеют одну общую точку. На комплексном чертеже проекции точки пересечения прямых находятся на одной линии связи.

Из инвариантного свойства 5 следует, что проекция точки пересечения проекций прямых **a** и **b** есть точка пересечения этих прямых (рис. 3.4).

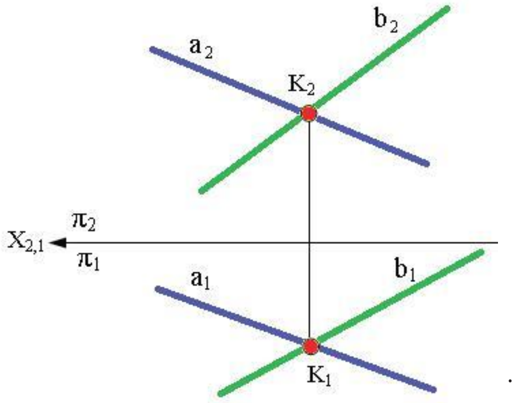



Рис. 3.4. Изображение пересекающихся прямых

*2. Параллельные прямые*

На рис. 3.5 изображены проекции параллельных прямых **a** и **b**, пересекающихся в несобственной точке (прямых, лежащих в одной плоскости и пересекающихся в бесконечно удаленной точке).

Из инвариантного свойства 6 следует, что проекции параллельных прямых **a** и **b** параллельны.

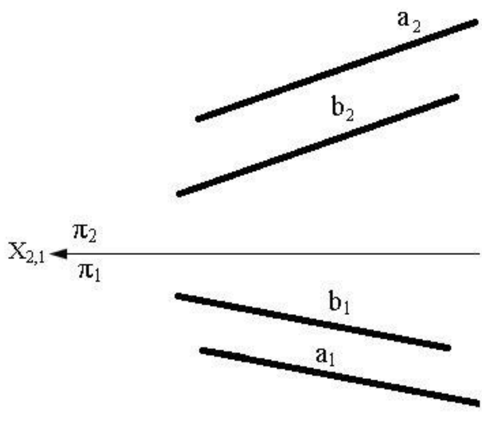



Рис. 3.5. Изображение параллельных прямых

*3. Скрещивающиеся прямые*

Скрещивающиеся прямые – это прямые лежащие в разных плоскостях и не имеющие ни одной общей точки. На комплексном чертеже (рис. 3.6) точки пересечения проекций этих прямых не лежат на одном перпендикуляре к оси X (в отличие от пересекающихся прямых, см. рис. 3.4).

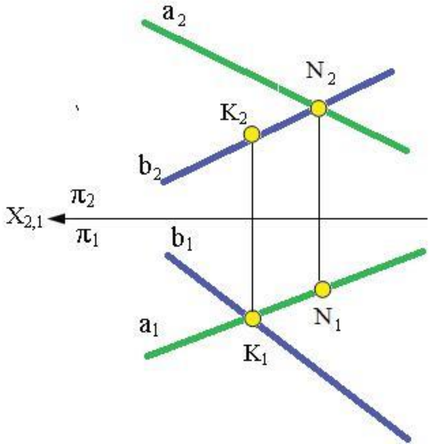



Рис. 3.6. Изображение скрещивающихся прямых

## 3.5. Прямая и точка на плоскости

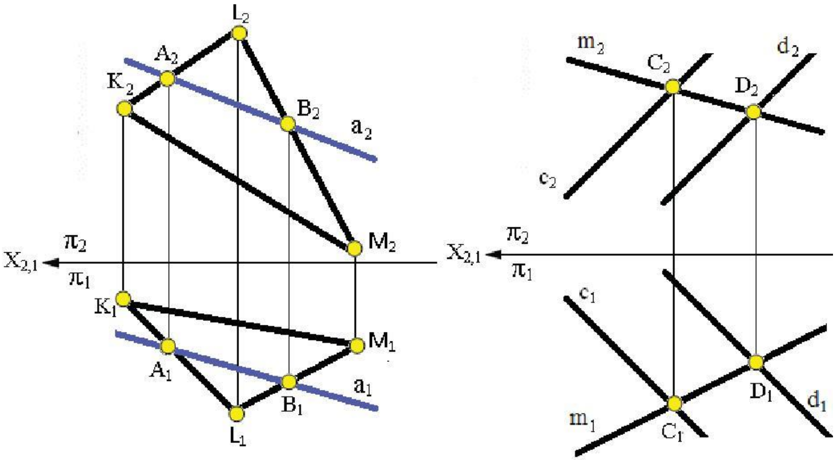
Прямая **a** принадлежит плоскости **α**, если две ее точки A и B принадлежат этой плоскости **α** ( KLM). Справедливо и обратное утверждение: если точки A и B принадлежат плоскости **α** ( K LM), то прямая **a**, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости **α**(рис. 3.7, а).

Прямые **a** и **m**, принадлежащие разным плоскостям показаны на рис. 3. 7. Прямая **a** принадлежит плоской фигуре LKM, потому что на проекциях прямой и плоской фигуры имеются две общих точки A и B. Прямая **m** принадлежит плоскости, заданной параллельными прямыми **c** и **d**, т. к. она проходит через точки C и D, расположенные на этих прямых.

Прямая принадлежит плоскости, если ее следы принадлежат одновременно следам плоскости.

Справедливо и обратное утверждение: если следы прямой принадлежат следам плоскости, то эта прямая принадлежит плоскости.

Кроме того, существует еще одно свойство, определяющее взаимное положение точки и плоскости: точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 3.7)




а б

Рис. 3.7. Изображение прямой **m**, принадлежащей плоскости

## 3.6. Взаимное положение прямой и плоскости

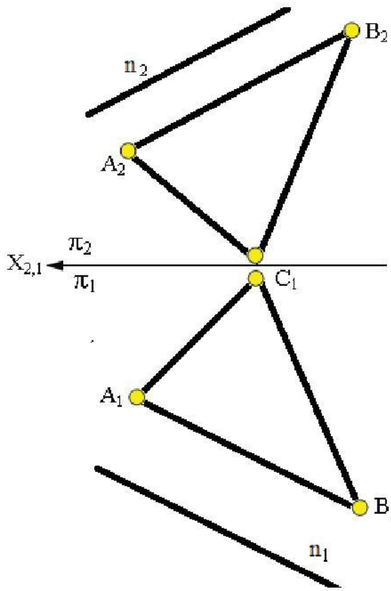
Существует несколько положений прямой относительно плоскости.

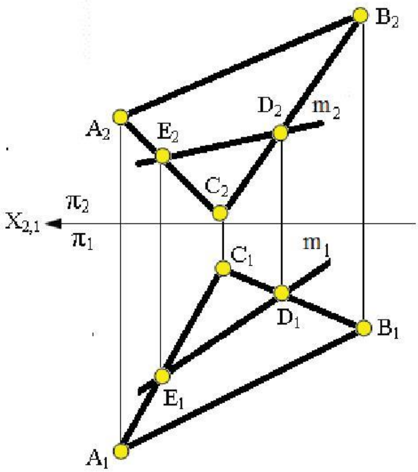
1. Прямая расположена в плоскости.
2. Прямая параллельна плоскости.
3. Прямая пересекает плоскость.

*а) прямая параллельная плоскости* (рис. 3.8).

Рассмотрим признак параллельности прямой и плоскости. Прямая параллельна плоскости, когда она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая **m** параллельна плоскости **α**( АВС), так как она расположе-на в плоскости (рис. 3.8. б) и имеет признак принадлежности плоскости – две общих точки (D,E), прямая **n** (рис. 3.8. а) параллельна плоскости **α**( АВС), потому, что она параллельна прямой АВ, которая принадле-жит этой плоскости.




а б

Рис. 3.8. Прямые, параллельные плоскостям треугольников АВС:
а – прямая **n** находится вне плоскости; б – прямая **m** находится в плоскости

*б. Прямая перпендикулярная плоскости.*

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. Подробно перпендикулярность прямых рассмотрена в разделе 4.

## 3.7. Пересечение прямой и плоскости

Линия пересечения двух плоскостей – прямая линия. Рассмотрим сначала один из частных случаев (рис. 3.9), когда одна из пересекающихся плоскостей **α** проецирующая задана следом и параллельна горизонтальной плоскости проекций ($\alpha \parallel \pi_1$, $f^0_\alpha \parallel X$), а вторая плоскость α' – общего положения и задана на чертеже проекциями треугольника АВС.

В этом случае линия пересечения **a**, принадлежащая плоскости α, будет также параллельна плоскости $\pi_1$, т. е. будет совпадать с горизонталью пересекающихся плоскостей (a ≡ h). В этом случае одна проекция этой прямой $D_2E_2$ известна. Другую проекцию $D_1E_1$ искомой прямой можно найти по её принадлежности плоскости треугольника . Видимость точки B определена по её положению на горизонтальной плоскости проекций $\pi_1$.

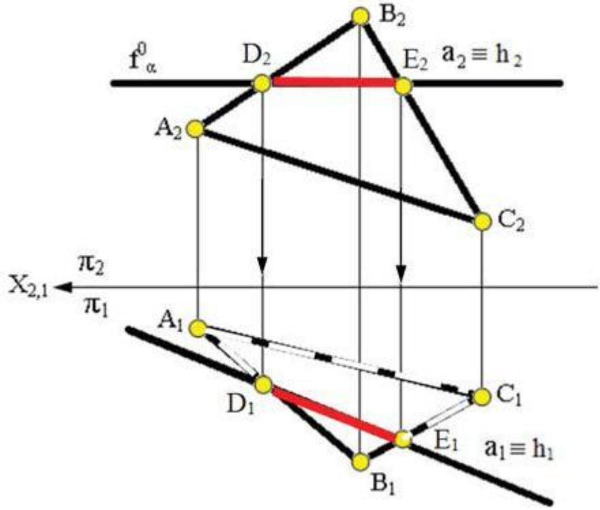



Рис. 3.9. Первый частный случай пересечения плоскости общего положения с плоскостью горизонтального уровня

Рассмотрим второй частный случай (рис. 3.10): одна из пересекающихся плоскостей **α** задана следами ($h^0_\alpha \cap f^0_\alpha$) и параллельна фронтальной плоскости проекций ($\alpha \parallel \pi_2$, $h^0_\alpha \parallel X$), а вторая плоскость **α'** – общего поло-жения и задана на чертеже двумя пересекающимися следами $(h^0_\alpha \cap f^0_\alpha)$'. В этом случае линия пересечения **a,** принадлежащая плоскости **α**, будет также параллельна плоскости $\pi_2$, т. е. будет совпадать с фронталью пе-ресекающихся плоскостей (a ≡ f).

Из условия параллельности плоскостей известно, что фронтальный след плоскости параллелен фронтальной проекции фронтали плоско-сти, а горизонтальный след плоскости параллелен горизонтальной про-екции горизонтали этой плоскости. Пример построения точки пересе-чения (K) прямой **a** (AB) с плоскостью **α** (DEF) показан на рис. 3.11. Для этого прямая **a** заключена в произвольную плоскость **β** и определе-на линия пересечения плоскостей **α** и **β**.

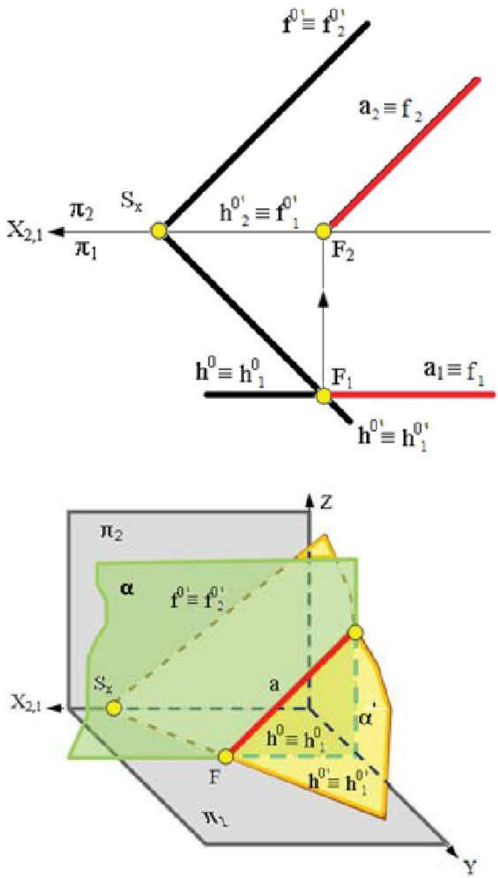



Рис. 3.10. Второй частный случай пересечения плоскости общего положения с плоскостью фронтального уровня

В рассматриваемом примере прямые АВ и MN принадлежат одной плоскости **β** и пересекаются в точке К, а так как прямая MN принадлежит заданной плоскости α (DEF), то точка К является и точкой пересечения прямой **а** (АВ) с плоскостью α.

Для решения подобной задачи на комплексном чертеже необходи-мо уметь находить точку пересечения прямой общего положения с плоскостью.

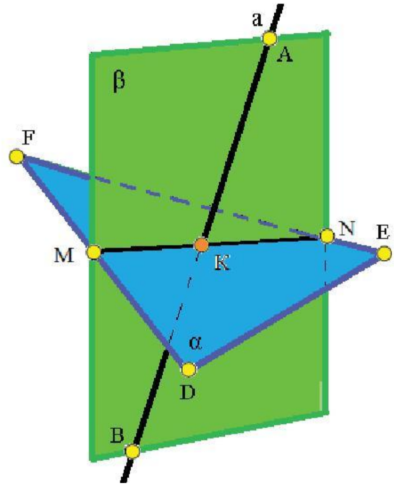



Рис. 3.11. Пример построения точки пересечения прямой с плоскостью

Рассмотрим пример нахождения точки пересечения прямой общего положения AB с плоскостью треугольника общего положения DEF представленный на рис. 3.12.

Для нахождения точки пересечения через фронтальную проекцию прямой $A_2B_2$ проведена конкурирующая прямая MN, принадлежащая плоскости. На фронтальной плоскости проекций ($\pi_2$) эта прямая представлена проекциями точек $M_2$,$N_2$. Из условия принадлежности прямой плоскости на горизонтальной плоскости проекций ($\pi_1$) находятся горизонтальные проекции $M_1$ и $N_1$, этих точек. В пересечении горизонтальных проекций прямых $A_1B_1$ и $M_1N_1$ образуется горизонтальная проекция точки их пересечения ($K_1$). По линии связи и условиям принадлежности на фронтальной плоскости проекций находится фронтальная проекция точки пересечения ($K_2$).

Видимость отрезка AB относительно треугольника DEF определена методом конкурирующих точек.

На плоскости $\pi_2$ рассмотрены две точки N $\in$ EF и 1 $\in$ AB. По горизонтальным проекциям этих точек можно установить, что точка N расположена ближе к наблюдателю ($Y_N$>$Y_1$ ), чем точка 1 (направление луча зрения параллельно S). Следовательно, прямая AB, т. е. часть прямой AB ($K_1$) закрыта плоскостью DEF на плоскости $\pi_2$ (ее проекция $K_21_2$ показана штриховой линии). Аналогично установлена видимость на плоскости $\pi_1$.

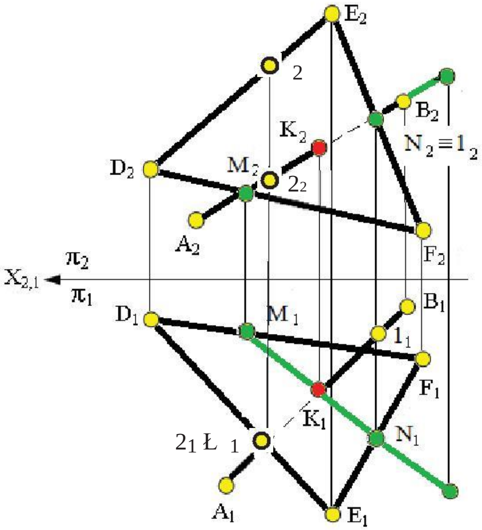



Рис. 3.12. Пример определения точки пересечения прямой и плоскости

Рассмотрим пример (рис. 3.13) определения линии пересечения плоскостей, заданных следами.

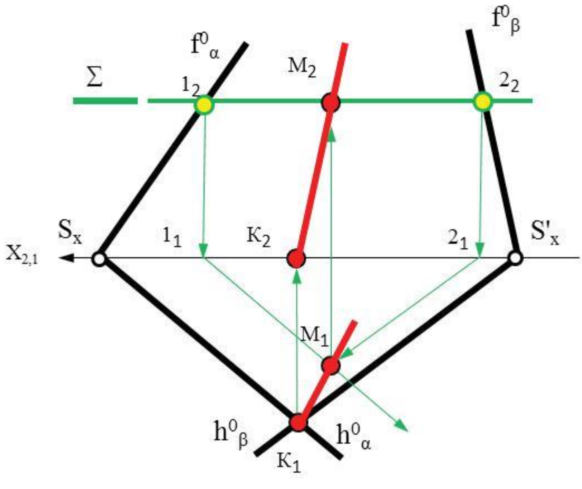



Рис. 3.13. Нахождение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами

Для решения использована вспомогательная плоскость $\sum$. Алгоритм решения аналогичен примеру, рассмотренному выше и очевиден из рисунка.

## Вопросы для самоконтроля

*1. Какие задачи называются позиционными?*

*2. Для чего и как используется метод конкурирующих точек?*

*3. Что такое конкурирующие точки?*

*4. Как определяется взаимное положение прямой и точки?*

*5. Как определяется взаимное положение прямых линий? Привести графические примеры.*

*6. Каковы свойства принадлежности точки и прямой плоскости? Привести примеры?*

*7. Каков алгоритм нахождения точки пересечения прямой с плоскостью?*

*8. Как определить линию пересечения двух плоскостей заданных следами?*

*9. Сформулировать условия принадлежности прямой линии плоскости.*

# 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.

## 4.1. Условие перпендикулярности двух прямых на комплексном чертеже

Особый интерес с точки зрения решения задач начертательной геометрии представляют перпендикулярные прямые.

Из классической Евклидовой геометрии известно следующее свойство перпендикулярности двух прямых:

*Две прямые перпендикулярны, если угол между ними составляет 90°.*

Кроме того, в начертательной геометрии существует еще одно утверждение на эту тему:

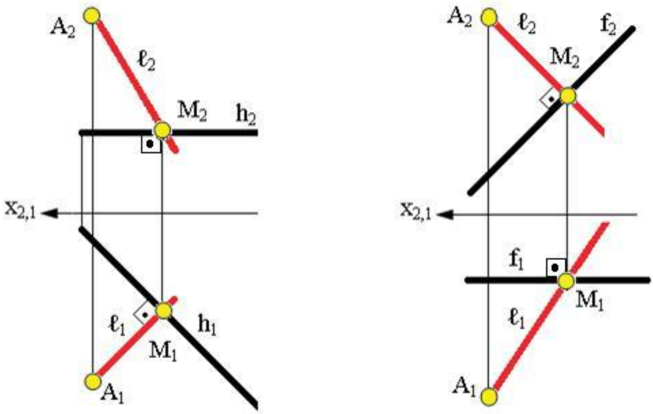
*Две прямые перпендикулярны, если одна из них линия уровня.*

Для подтверждения этого заключения рассмотрим примеры, приведенные на рис. 4.1. Предположим что необходимо через точку A провести прямую $\ell$, пересекающую горизонталь h под прямым углом $\ell \perp h$ (рис. 4.1. а).

Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости $\pi_1$, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через горизонтальную проекцию точки $A_1$проведем горизонтальную проекцию искомой прямой $\ell_1$. Отметим горизонтальную проекцию точки пересечения прямой и горизонтали $M_1 = \ell_1 \cap h_1$. Найдем по принадлежности фронтальную проекцию точки пересечения $M_2$. Точки $A_2$ и $M_2$ определяют фронтальную проекцию искомой прямой $\ell$. Две проекции прямой определяют ее положение в пространстве.

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $\ell \perp f$ аналогичны рассмотренным с той лишь разницей, что построения неискаженной проекции прямого угла следует начинать с фронтальной проекции (рис. 4.1. б).

На основании теоремы, обратной теореме о проецировании прямо-го угла, можно решить на комплексном чертеже обратную задачу: можно по заданному на комплексном чертеже изображению углов с вершинами М (рис. 4.1) определить, что в действительности они равны 90°. Если, например, рассмотрим угол с вершиной М (рис. 4.1.а), то, очевидно, что $h \parallel \pi_1$; $\ell_1 \cap h_1 = 90°$, а следовательно, $\ell \cap h = 90°$.




а б

Рис. 4.1. Примеры построения на комплексном чертеже перпендикулярных прямых: а – $\ell \perp h$; б – $\ell \perp f$

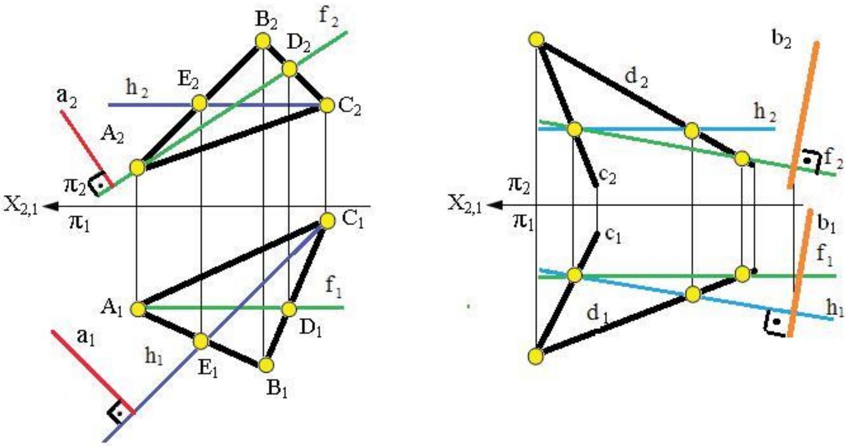
## 4.2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если какие-либо прямые **b** и **c**, принадлежащие плоскости **β**, расположены произвольно относительно плоскостей проекций, то прямые углы между прямой **a** и прямыми **b** и **c,** спроецируются на плоскость проекций с искажениями.

Для того чтобы, указанные прямые углы, спроецировались в натуральную величину, прямые **b** и **c** должны быть параллельны плоскостям проекций, т. е. являться соответственно горизонталью **h** и фронталью **f** плоскости **β.**

На комплексном чертеже (рис. 4.2) прямая **a** будет перпендикулярна плоскости **β,** если она перпендикулярна линиям уровня горизонтали **h** и фронтали **f** этой плоскости в том случае, если горизонтальная проекция прямой $\mathbf{a_1}$ перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали $\mathbf{h_1}$ плоскости ABC $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a_1} \perp \mathbf{h_1})$ и фронтальная проекция прямой $\mathbf{a_2}$ перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости **β** (**$a_2 \perp f_2$**). При этом прямые углы между прямой **a** и линиями уровня **h** и **f** на соответствующие плоскости проекций спроецируются без искажений.

На рис. 4.2. изображены прямые, перпендикулярные плоскостям, заданным различными способами.




а б

Рис. 4.2. Примеры изображения прямых перпендикулярных, плоскостям, заданным: а) – фигурой треугольника ΔABC; б) – двумя пересекающимися прямыми c⋂d

Кроме вышесказанного существует теорема:

*Для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонталь-ная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция − к фронтальной проекции фронтали этой плоскости*. Следовательно, прямая **a** *перпендикулярна плоскости **α**, если ее проекции перпендикулярны соответствующим проекциям горизонтали **h** и фронтали **f** этой плоскости*.

Если плоскость на комплексном чертеже задана следами, то горизонталью и фронталью этой плоскости являются ее пересекающиеся следы.

В таком случае, прямая **a** перпендикулярна плоскости **α** (**$h^0 \times f^0$**), если ее проекции перпендикулярны соответствующим пересекающим-ся следам плоскости (рис. 4.3).

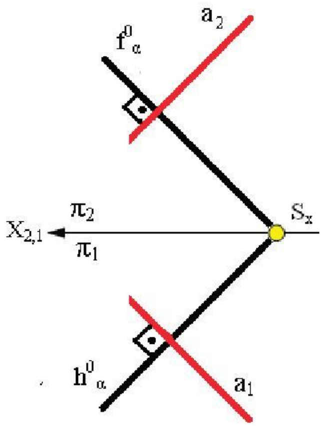



Рис. 4.3. Изображение прямой, перпендикулярной плоскости, заданной горизонтальным и фронтальным следами плоскости

## 4.3. Условие перпендикулярности двух плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Две пересекающиеся плоскости, называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

## 4.4. Свойства перпендикулярных плоскостей

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то заданная плоскость перпендикулярна второй плоскости.

*Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.*

На рис. 4.4 изображены две проецирующие плоскости β, γ и произвольная плоскость δ, следы которой проходят через следы прямой **a.**

На рис. 4.5 изображён комплексный чертёж, на котором представлены две взаимно-перпендикулярные плоскости.

Это плоскость, заданная фигурой треугольника Δ**ABC** и плоскость, заданная пересекающимися прямыми **KM** и **KN**. Их перпендикулярность подтверждает прямая **b**, перпендикулярная плоскости **ABC**, потому, что её проекции перпендикулярны соответствующим проекциям линий уровня плоскости **ABC**. Проекции линий уровня плоскости **ABC** выполняют условия перпендикулярности прямой **b** и плоскости, потому, что $\mathbf{b_1} \perp \mathbf{h_1}$, а $\mathbf{b_2} \perp \mathbf{f_2}$.

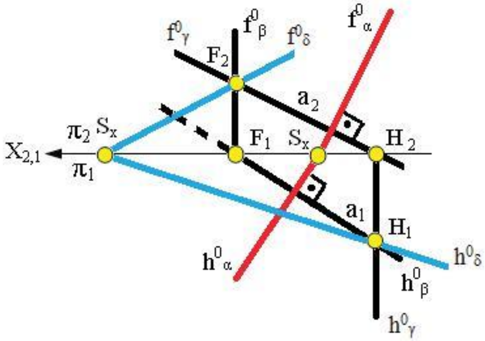



Рис. 4.4. Условие перпендикулярности плоскостей

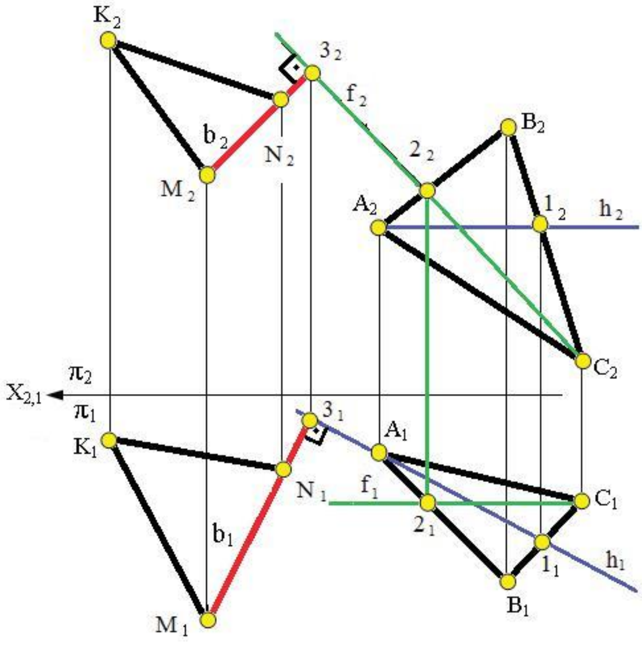



Рис. 4.5. Изображение двух взаимно-перпендикулярных плоскостей

По условию перпендикулярности, любая плоскость (например, плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми **КМ** и **КN**), проходящая через прямую **b,** перпендикулярную плоскости **АВС**, перпендикулярна плоскости **АВС**.

## 4.5. Определение длины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций

Прямая общего положения на плоскости проекций отображается с искажением (рис.4.6). Для того чтобы найти её натуральную величину, необходимо воспользоваться **правилом прямоугольного треугольника**, согласно которому на комплексном *чертеже натуральной величиной прямой является гипотенуза прямоугольного треугольника, построенного на двух катетах. Один из этих двух катетов – это проекция рассматриваемой прямой, а вторым катетом является разность координат начала и конца этой прямой или разность координат* **z точек А и В (** $z = z_A - z_B$**).**

Углы наклона прямой общего положения к плоскостям проекций по двум ее проекциям находят при определении действительной величины этой прямой способом прямоугольного треугольника. Если взять прямую общего положения **АВ** и спроецировать ее на горизонтальную плоскость проекций, а через точку **А** провести линию, параллельную плоскости, то в пространстве получится прямоугольный треугольник, один из катетов которого **(АВ')** равен длине проекции прямой **АВ**, а угол между прямой и этим катетом будет углом наклона заданной прямой к горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.6), что можно подтвердить известным математическим соотношением:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = BB' / AB' = (BB_1 - B'B_1) / AB' = (z_B - z_A) / A_1 B_1.$$

Прямая $A_1B^0$ представляет натуральную величину прямой общего положения **АВ**.

Для определения натуральной величины прямой общего положения АВ и угла наклона её к плоскости проекций на эпюре (комплексном чертеже) необходимо построить прямоугольный треугольник:

- первый катет этого треугольника равен проекции прямой, на плоскости проекций;

- для построения второго катета необходимо из проекции любого конца проекции прямой линии под прямым углом к проекции провести луч, на котором отложить длину второго катета, равную разности расстояний от концов прямой до данной плоскости проекций;

- гипотенуза полученного прямоугольного треугольника будет равна действительной величине заданной прямой;

- угол наклона прямой линии к той или иной плоскости проекций равен углу между гипотенузой – натуральной величиной и катетом – проекцией прямой на эту плоскость проекций.

Углы наклона прямой линии общего положения к плоскости, всегда меньше их ортогональных проекций.

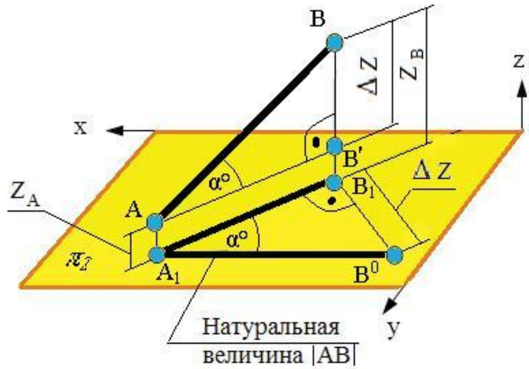



Рис. 4.6. Определение угла наклона и натуральной величины отрезка

Учитывая сказанное выше и рассмотрев рис. 4.7, можно утверждать, что длина отрезка **AB** равна гипотенузе треугольника, катетами которого являются фронтальная проекция отрезка $\mathbf{A_2B_2}$ и разность координат **Y** точек **A** и **B** ( $\mathbf{Y = Y_B - Y_A}$**).** Угол этого треугольника, лежащий против катета **Y**, равен углу наклона отрезка AB к фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$ **(угол β°).**

По аналогии длина отрезка **AB** может быть определена и как гипотенуза треугольника, катеты которого профильная проекция отрезка $\mathbf{A_3B_3}$ и разность координат **X** ( $\mathbf{X = X_A - X_B}$) точек **A** и **B.** Угол **γ°** этого треугольника, лежащий против катета **X**, определяет угол наклона отрезка **AB** к профильной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$.

На рис. 4.8 показан пример определения натуральной (действительной) длины прямой **AB** и углов её наклона к плоскостям проекций.

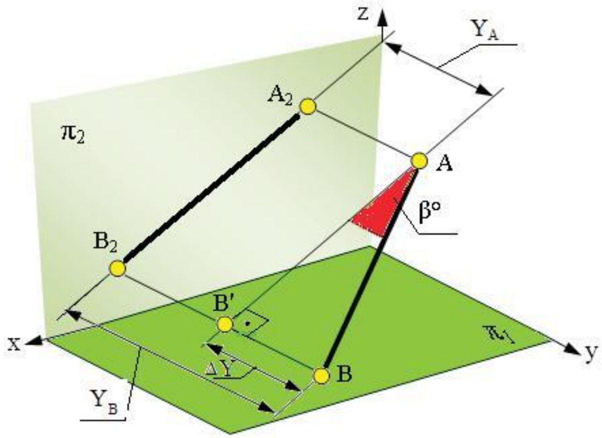



Рис. 4.7. Определение угла наклона и натуральной величины отрезка

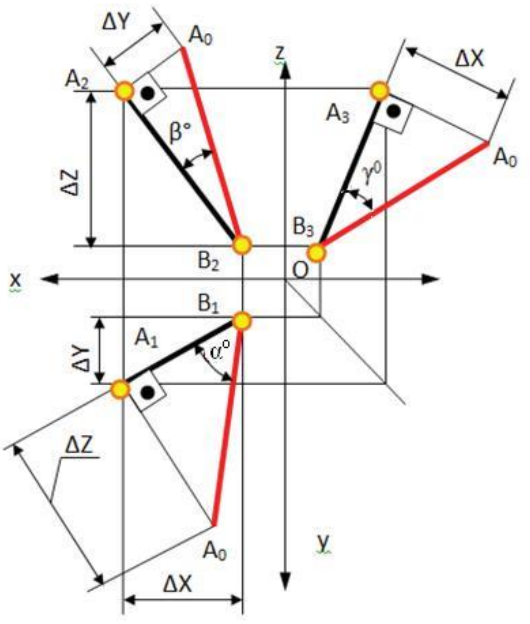



Рис. 4.8. Определение длины отрезка и углов наклона
к плоскостям проекций на комплексном чертеже

Угол $\alpha^{o}$, получен при построении прямоугольного треугольника на горизонтальной проекции прямой. Углы $\beta$ и $\gamma$ определены с использованием фронтальной и профильной проекций прямой соответственно. Натуральная величина, указанной прямой, обозначена гипотенузами прямоугольных треугольников, построенных на трёх плоскостях проекций.

## 4.6. Линия наибольшего наклона (ската)

К группе главных линий плоскости относится прямая, принадлежа-щая плоскости и перпендикулярная линиям уровня этой плоскости – горизонтали, фронтали или профильной прямой и (или) соответствую-щим следам плоскости. Эта линия получила название линии наиболь-шего наклона заданной плоскости к плоскостям проекций **$\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$**. Иногда линию наибольшего наклона к плоскости называют *линией ската*.

Следует иметь ввиду, что линия наибольшего наклона может использоваться для определения угла наклона заданной плоскости к плоскостям проекций.

Если рассматривать такую линию $\ell$ в пространстве (рис. 4.9), то можно сделать вывод о том, что **линия наибольшего наклона $\ell$** и ее горизонтальная проекция $\ell_1$ образуют линейный угол **$MNM_1$ ($MN \perp h^0$ и $M_1N \perp h^0$)**, который служит мерой двугранного угла, составленного горизонтальной и заданной плоскостями.

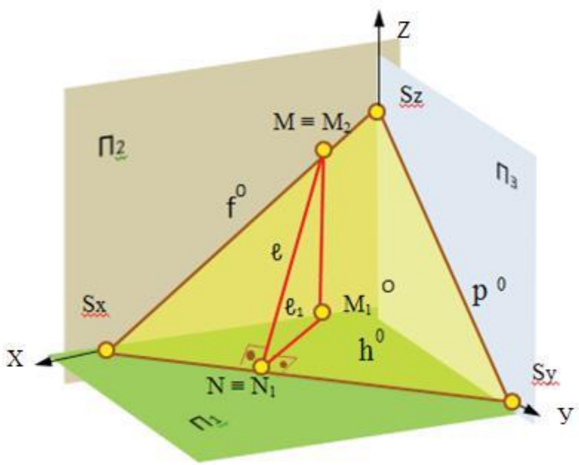



Рис. 4.9. Изображение линии наибольшего наклона плоскости

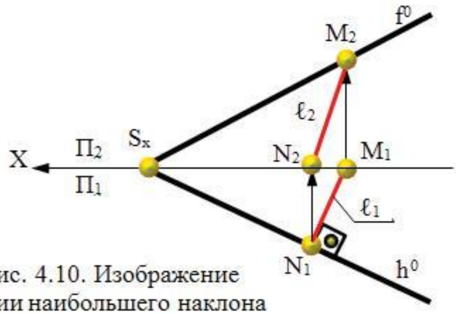



Рис. 4.10. Изображение инии наибольшего наклона на комплексном чертеже

На комплексном чертеже в двух плоскостях проекций (рис. 4.10) изображение линии наибольшего наклона изображается с учётом двух её проекций **ℓ** ($\ell_1$,$\ell_2$).

На комплексном чертеже для линии наибольшего наклона заданной плоскости к горизонтальной плоскости проекций характерно, что её горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали ***h*** этой плоскости.

При наклоне к фронтальной плоскости проекций, фронтальная проекция линии наибольшего наклона перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали ***f*** этой плоскости и, наконец, профильная проекция линии наибольшего наклона плоскости к профильной плоскости проекций займет положение, перпендикулярное к профильной проекции профильной прямой ***p*****.**

Рассмотрим (рис. 4.11) пример построения линии наибольшего наклона (ЛНН) **ℓ** плоскости $\alpha$ ($a \parallel b$) к горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1$.

Построение линии наибольшего наклона плоскости ℓ на комплексном чертеже начинается с построения её горизонтальной проекции $\ell_1$.

На рисунке показана линия наибольшего наклона плоскости $\alpha$ ($a \parallel b$) к горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1$ – прямая $\ell$.

Рассмотрим алгоритм нахождения линии наибольшего наклона плоскости $\alpha(a \parallel b)$ к одной из плоскостей проекций на комплексном чертеже.

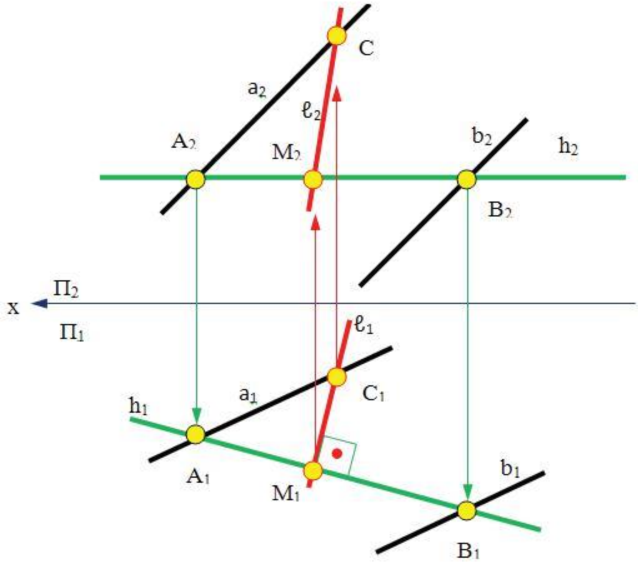



Рис. 4.11. Изображение линии наибольшего наклона плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ **(*a* ‖ *b*)** к горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_1}$

Прежде чем провести горизонтальную проекцию $\boldsymbol{\ell_1}$, определяем направление горизонтальной проекции горизонтали $\boldsymbol{h_1}$:

- проводим произвольную фронтальную проекцию $\boldsymbol{h_2 (h_2 \parallel x)}$;

- отмечаем точки $\boldsymbol{A_2 = h_2 \cap a_2}$ ***и*** $\boldsymbol{B_2 = h_2 \cap b_2}$;

- по $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{B_2}$ находим $A_1$ и $\boldsymbol{B_1}$, которые определяют положение $h_1$.

Далее:

- через произвольную точку $\mathbf{C_1}$ плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ проводим $\boldsymbol{\ell_1 (\ell \perp h_1)}$;

- отмечаем $\boldsymbol{M_1 = \ell_1 \cap h_1}$;

- по $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{M_1}$ находим $\mathbf{C_2}$ и $\mathbf{M_2}$;

- соединив эти две точки, определим положение фронтальной проекции прямой $\boldsymbol{\ell_2}$ – линии наибольшего наклона плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ **(*a* ‖ *b*)** к горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_1}$.

Обращаясь к рис. 4.9. можно сделать вывод, что для определения углов $\boldsymbol{\alpha}$ ° и $\boldsymbol{\beta}$° наклона плоскости ***a* ‖ *b*** к горизонтальной $\boldsymbol{\Pi_1}$ и фронтальной $\boldsymbol{\Pi_2}$ плоскостям проекции линия наибольшего наклона плоскости должна быть построена в этой плоскости дважды – к горизонтали этой плоскости ***h*** и фронтали ***f*.**

Из рисунка видно, что угол наклона $\alpha°$ определяется из прямоугольно-го треугольника $MNM_1$, в котором гипотенуза $MN$ является натуральной величиной линии наибольшего наклона плоскости, а угол $\alpha°$ является углом между натуральной величиной $\ell$ и её проекцией $\ell_1$ на горизонталь-ной плоскости проекций $\Pi_1$. Следовательно, при определении угла накло-на плоскости $\alpha$ $(a \parallel b)$ на комплексном чертеже необходимо после постро-ений (рис. 4.11), определивших направление линии наибольшего наклона к $\Pi_1$, определить натуральную величину известного отрезка $M_1C_1$ (рис. 4.12).

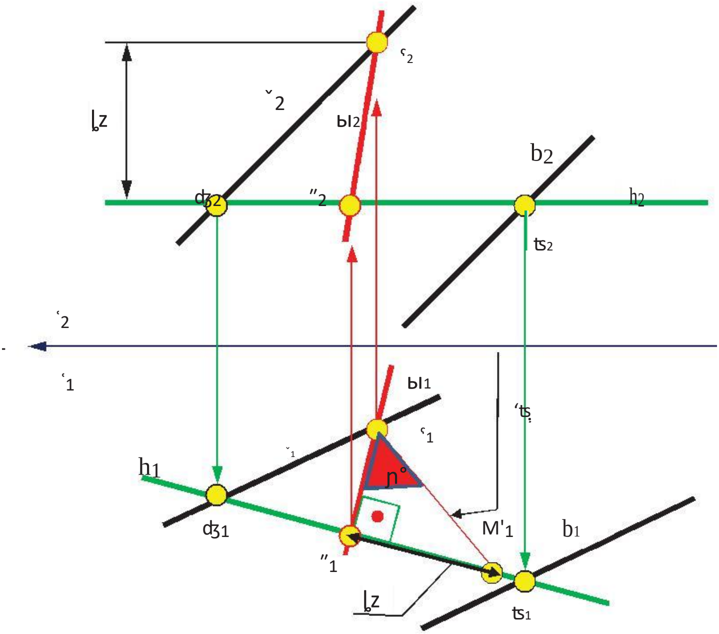



Рис. 4.12. Определение угла наклона плоскости
к горизонтальной плоскости проекций

Для этого необходимо воспользоваться правилом прямоугольного треугольника и построить прямоугольный треугольник на двух катетах, один из которых – это отрезок $M_1C_1$, а величину второго катета **z** опре-делить во фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$ как разницу начала и конца отрезка $M_2C_2$. Величину **z** отложить под прямым углом к $M_1C_1$ и получить точку $M'_1$, которую соединить с точкой $C_1$. Линия $M'_1C_1$ – натуральная величина отрезка $M_1C_1 = \ell_1$. Значит найдена натуральная величина линии наибольшего наклона заданной плоскости (НВ ЛНН) к горизонтальной плоскости проекций **П₁**. Согласно правилу прямоугольного треугольника известно, что в построенном прямоугольном треугольнике угол между гипотенузой (натуральной величиной отрезка) и проекцией отрезка является углом наклона к плоскости проекций. Значит, в нашем случае (рис. 4.12) получена величина угла наклона **($\alpha°$)** заданной плоскости $\alpha$ **($a \parallel b$)** к горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1$.

Для определения угла наклона **β°** заданной плоскости к фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$ следует выполнить на комплексном чертеже действия аналогичные действиям при определении **α°.**

Разница в определении состоит в том, что построение начинается с определения фронтали **f** заданной плоскости.

Рассмотрим (рис. 4.13) плоскость, заданную двумя параллельными прямыми $\alpha$ **($a \parallel b$)** и выполним построения линии наибольшего накло-на в заданной плоскости для нахождения угла наклона этой плоскости к фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$.

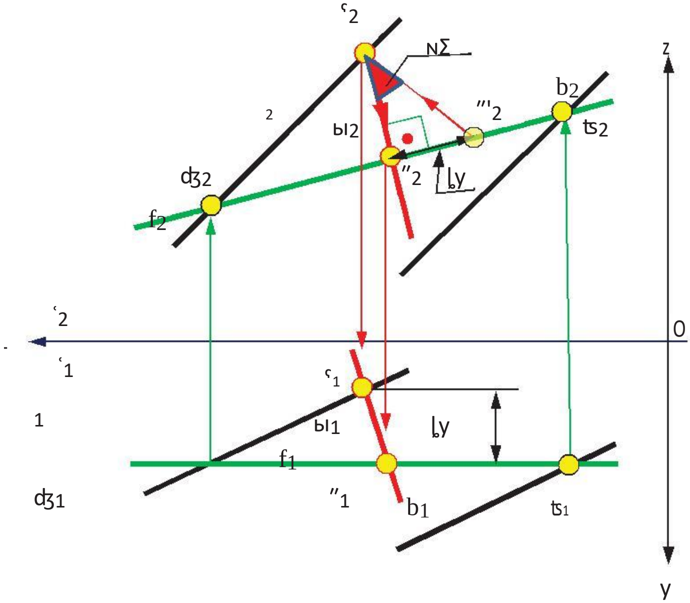



Рис. 4.13. Определение угла наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций

Угол $\alpha°$ – это угол наклона прямой $\ell$ к горизонтальной плоскости проекций **П1**. Он соответствует углу наклона плоскости $\alpha$ $(a \parallel b)$ к той же плоскости проекций **П1**.

Угол $\beta°$ – это угол наклона прямой $\ell$ к фронтальной плоскости проекций **П2**. Он соответствует углу наклона плоскости $\alpha$ $(a \parallel b)$ к той же плоскости проекций **П2.**

## Вопросы для самоконтроля

*1. Каковы условия перпендикулярности прямых линий на комплексном чертеже?*

*2. Каковы условия перпендикулярности прямой к плоскости на комплексном чертеже.*

*3. Какова сущность способа прямоугольного треугольника?*

*4. Какое свойство линии наибольшего наклона является основным?*

*5. Как можно определить действительную величину отрезка, находящегося в общем положении по отношению к плоскостям проекций?*

*6. Как определяется угол наклона плоскости к плоскостям проекцийс помощью линий наибольшего наклона?*

# 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

## 5.1. Необходимость преобразований комплексного чертежа

Трудоемкость и, как следствие, точность графического решения задач часто зависят не только от сложности задач, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры, входящие в условие задачи, по отношению к плоскостям проекций.

Проецируемая фигура может занимать по отношению к плоскостям проекций произвольное, или частное положение.

В первом случае, как правило, получаются проекции, неудобные для решения задач. Решения могут значительно упрощаться, когда используются частные положения геометрических фигур относительно плоскостей проекций. Наиболее выгодным частным положением проецируемой фигуры при ортогональном проецировании следует считать:

1) положение, перпендикулярное к плоскости проекций – при решении позиционных задач;

2) положение, параллельное плоскости проекций – для решения метрических задач.

Таким образом, при решении той или иной задачи бывает целесообразно приведение фигуры к частному положению.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществлять изменением взаимного положения проецируемой фигуры и плоскости проекции. При ортогональном проецировании это может быть достигнуто двумя путями:

1) перемещением в пространстве проецируемой фигуры, по отношению к плоскости проекций;

2) выбором новой плоскости проекций, по отношению к проецируемой фигуре.

Первый путь лежит в основе плоскопараллельного перемещения; второй – составляет теоретическую базу способа замены плоскостей проекций.

Для преобразования комплексного чертежа в практике, в основном, используют способ замены плоскостей проекций, плоскопараллельное перемещение и способ вращения.

## 5.2. Задачи преобразований комплексного чертежа

Все метрические и позиционные задачи можно свести к одной из следующих четырех задач:

1. Прямую линию общего положения преобразовать в прямую линию уровня;
2. Прямую линию общего положения преобразовать в линию проецирующую;
3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую пло-скость;
4. Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня.

## 5.3. Преобразование комплексного чертежа способом замены плоскостей проекций

Рассмотрим решение задач, используя способ замены плоскостей проекций. При этом способе объект сохраняет своё положение в пространстве,а положение плоскостей проекций последовательно меняется. Любые две взаимно перпендикулярные плоскости могут быть приняты за новую систему плоскостей проекций, но при этом понятие горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций сохраняется.

**Задача №1**. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы прямая общего положения AB оказалась параллельной одной из плоскостей проекций т.е. прямой уровня (горизонталь или фронталь) новой системы* (рис. 5.1).

Для решения задачи необходимо заменить плоскость проекций $\mathbf{П_1}$, или $\mathbf{П_2}$ новой плоскостью проекций $\mathbf{П_4}$, параллельной прямой **AB** и перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций.

Такая задача решается на комплексном чертеже при необходимости определения натуральной длины отрезка прямой и угла наклона этого отрезка к плоскостям проекций. Для того чтобы прямая **AB** в новой системе плоскостей проекций стала, например, фронталью, нужно заменить фронтальную плоскость проекций $\mathbf{П_2}$новой плоскостью $\mathbf{П_4} \perp \mathbf{П_1}$ и параллельной прямой **AB**.

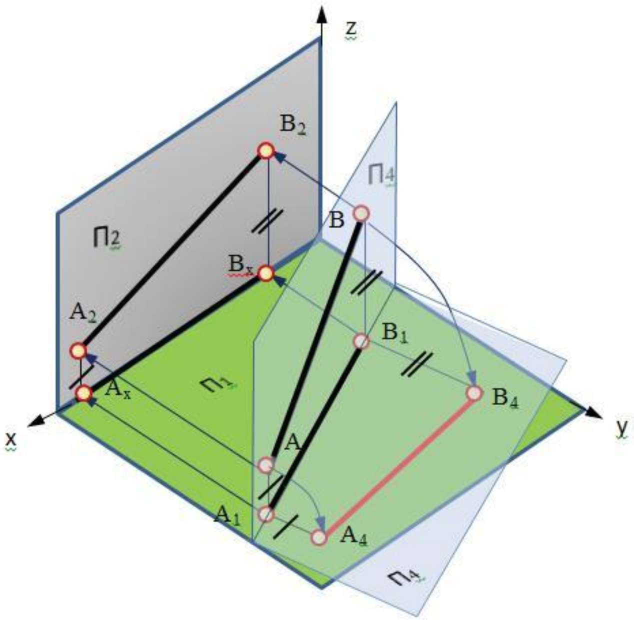



Рис. 5.1. Изображение в пространстве преобразования прямой линии общего положения в прямую линию уровня

Рассмотрим подробно этапы построения на комплексном чертеже (рис. 5.2), необходимые для решения первой основной задачи на преобразование комплексного чертежа:

1) провести новую ось проекций $\mathbf{x_{14}}$ параллельно $\mathbf{A_1B_1}$ на произвольном расстоянии от нее; такое положение оси $\mathbf{x_{14}}$ обусловливается тем, что $\mathbf{П_4}$ параллельна **AB**. В частном случае, если плоскость $\mathbf{П}_4$ проведена непосредственно через прямую **AB**, ось $\mathbf{x_{14} = A_1B_1}$;

2) выбрать на прямой две точки $\mathbf{A(A_1A_2)}$ и $\mathbf{B(B_1B_2)}$;

3) построить проекции точек **A** и **B** на плоскости $\mathbf{П_4}$.

Прямая $\mathbf{A_4B_4}$ является проекцией прямой AB на плоскость $\mathbf{П_4}$. Прямая **AB** в новой системе плоскостей проекций $\mathbf{П_1/П_4}$ является фронталью.

Отрезок **[AB]** прямой проецируется на плоскость $\mathbf{П_4}$ в истинную величину, т.е. $\mathbf{|A_4B_4| = |AB|}$, $\boldsymbol{\alpha}$°– величина угла наклона прямой **AB** к плоскости $\mathbf{П_1}$.

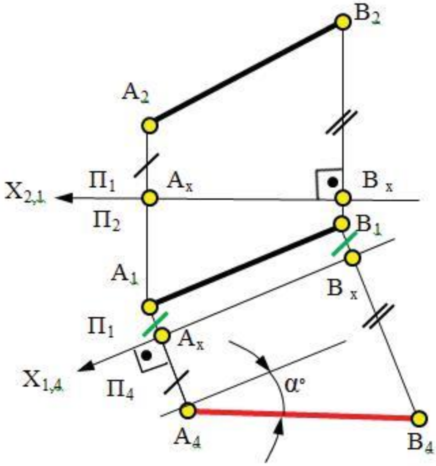



Рис. 5.2. Изображение преобразования прямой линии общего положения в прямую линию уровня

**Задача 2.** *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы линия общего положения **AB** стала проецирующей* (рис. 5.3).

Для решения задачи необходимо выполнить две замены плоскостей проекций – заменить фронтальную плоскость проекций **П$_2$** исходной системы **П$_2$/П$_1$** вспомогательной проецирующей плоскостью **П$_4$ || A$_1$B$_1$**. При этом плоскость **П$_4$** будет перпендикулярной **П$_1$** так как **AB || П$_4$** и образует с ней новую систему плоскостей проекций **П$_1$/П$_4$**.

Построения на комплексном чертеже:

1) провести новую ось проекций **x$_{14}$ || A$_1$B$_1$**;

2) построить проекции точек **A** и **B** на плоскости **П$_4$**, взяв координаты точек из плоскости **П$_2$;**

3) заменить плоскость **П$_1$** на новую **П$_5$**, которая будет ⊥ **A$_4$B$_4$.** Для этого нужно провести новую ось проекций **x$_{4,5}$.**

Так как расстояния точек **A** и **B** до плоскости **П$_4$** одинаковы, то проекции их на плоскости **П$_5$** совпадут, **A$_5$ ≡ B$_5$**, прямая **AB (A$_5$B$_5$)** в новой системе плоскостей проекций займёт проецирующее положение и станет горизонтально проецирующей.

Прямую линию общего положения преобразовать в проецирующую линию, заменой, только одной плоскости проекций, нельзя, потому, что плоскость **П5** перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни одной из «старых» плоскостей проекций, и, следовательно, не сможет образовать, ни с одной из них, прямоугольной системы плоскостей проекций. Для того, чтобы, прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций : прямую общего положения следует преобразовать в линию уровня, а затем линию уровня преобразовать в проецирующую (рис. 5.3).

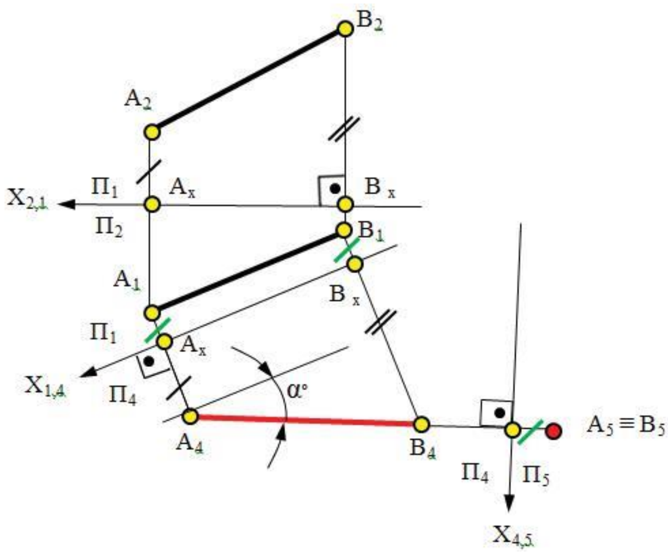



Рис. 5.3. Изображение преобразования прямой линии АВ общего положения в прямую горизонтально-проецирующую линию.

**Задача №3**. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей* (рис. 5.4, 5.5).

Для решения задачи необходимо заменить плоскость **П1** или **П2**исходной системы **П2/П1** новой плоскостью **П4**, перпендикулярной плоскости **Σ (АВС).**

*Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости*. Следовательно, если какую-либо прямую, принадлежащую плоскости **Σ,** преобразовать в проецирующую, то данная плоскость $\Sigma$ в новой системе плоскостей проекций станет проецирующей. Проще всего для этой цели воспользоваться линией уровня.

На рис. 5.4 плоскость **$\Sigma$(ABC)** общего положения преобразована во фронтально -проецирующую путем преобразования её горизонтали **h($h_1$,$h_2$)**, во фронтально-проецирующее положение. В новой системе плоскостей проекций **$П_1$/$П_4$** плоскость $\Sigma$ является фронтально проецирующей (**$\Sigma \perp П_4$**), и поэтому её проекция на **$П_4$** вырождается в прямую линию **$\Sigma_4$ ($C_4$, $A_4$, $B_4$).**

В этом случае α° – величина угла наклона плоскости $\Sigma$ к плоскости **$П_1$**.

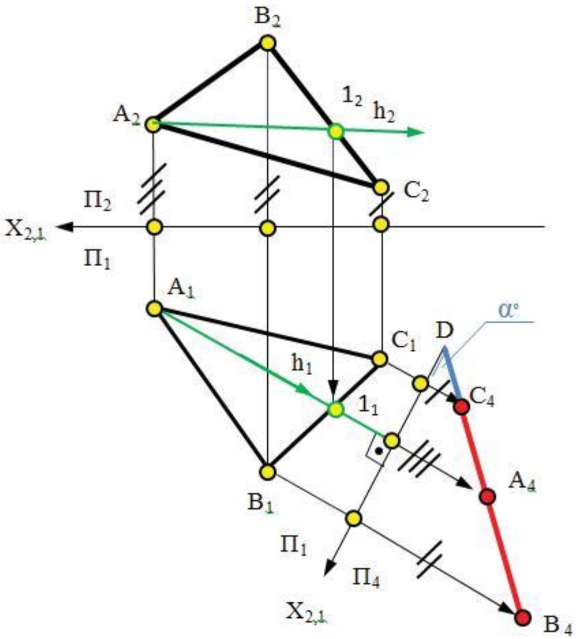



Рис. 5.4. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость для определения угла наклона α°к $П_1$

Для определения угла наклона **(β°)**, заданной плоскости к фронтальной плоскости проекций (**$П_4$**), необходимо выполнить преобразования построения, аналогичные преобразованиям, рассмотренным выше (рис.5.5), используя фронталь.

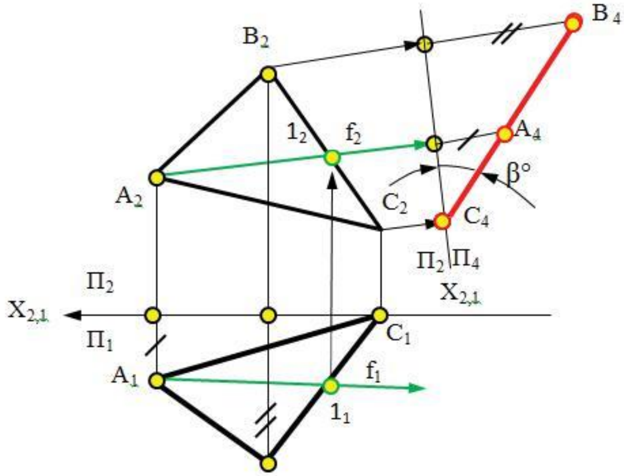



Рис. 5.5. Преобразование плоскости общего положения
в проецирующую плоскость для определения угла наклона β° к $П_2$

В этом случае плоскость преобразуется в горизонтально проецирующую плоскость с помощью её фронтали, которая преобразуется в горизонтально – проецирующую линию.

**Задача № 4.** *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня (параллельной одной из плоскостей проекций) новой системы* (рис.5.6).

Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня заменой только одной плоскости проекций нельзя, так как плоскость **$П_4$**, параллельная ей, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций и, следовательно, не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В начале решения плоскость необходимо преобразовать в проецирующую, т. е. решить задачу 3 на преобразование комплексного чертежа, а затем проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

На рис. 5.6 показан алгоритм преобразования плоскости **(ABC)** в плоскость уровня.

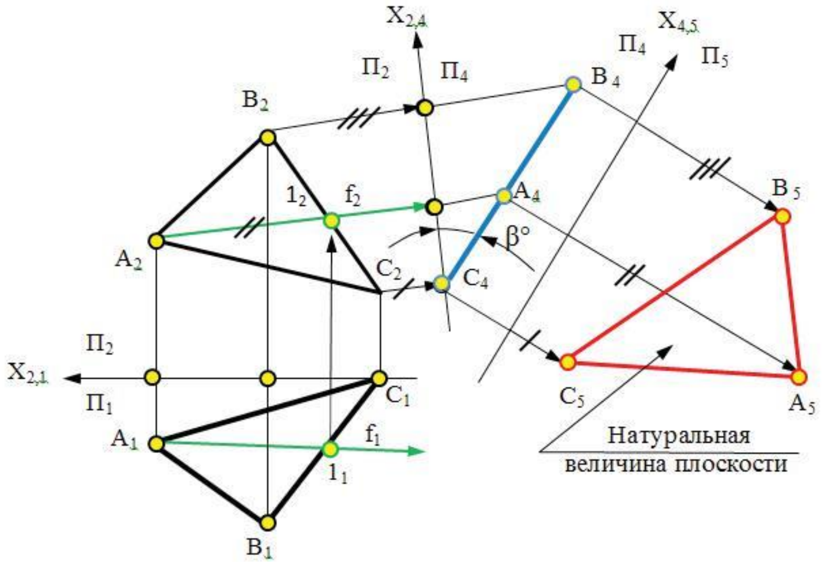



Рис. 5.6. Решение задачи на преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

Рассмотрим ещё один возможный вариант (рис. 5.7). Допустим, что необходимо определить натуральную величину фронтально проецирующей плоскости **Г( АВС**). Для этого заменим плоскость **П$_1$** новой плоскостью проекций П$_4$, параллельной плоскости **Г( АВС)** и, перпендикулярной незаменяемой плоскости **П$_1$**. В новой системе плоскостей проекций **П$_2$/П$_4$** плоскость **Г(АВС)** станет плоскостью уровня новой плоскости проекций.

Построения на комплексном чертеже:

1) провести новую ось проекций **$x_{2,4}$** параллельно **$A_2C_2$** на произвольном от нее расстоянии;

2) построить проекции точек **А, В** и **С** на плоскость **П$_4$;** 3)

треугольник **$A_4B_4C_4$** является проекцией плоскости треугольника **АВС** на плоскость **П$_4$.**

**Примечание.** Так как плоскость треугольника **АВС** параллельна **П$_4$,** значит отображение этого треугольника на **П$_4$** величина натуральная. Значит, третья задача на преобразование плоскости уже решена и для решения четвёртой задачи необходимо выполнить одну замену плоскостей проекций. Необходимо горизонтальную плоскость проекций заменить на плоскость **П$_4$** и создать новую систему **П$_2$ /П$_4$.**

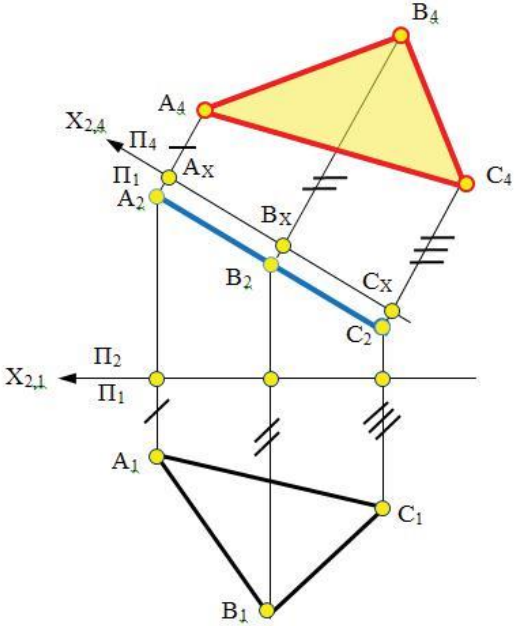



Рис. 5.7. Решение четвертой задачи на преобразование фронтально проецирующей плоскости в плоскость уровня

## 5.4. Преобразование чертежа способом плоскопараллельного перемещения

*Плоскопараллельным* называется такое перемещение элемента, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных одной плоскости, которая принимается за неподвижную.

Обычно за неподвижные плоскости принимаются плоскости проекций. Перемещение производится относительно одной из них. Если одного перемещения недостаточно, то выполняется ещё одно относительно другой плоскости проекций. При плоскопараллельном перемещении геометрического элемента относительно плоскости проекций его проекция на эту плоскость меняет положение, но не меняет своей формы и размеров. Если точка перемещается в плоскости, параллельной $\mathbf{П_1}$, то ее фронтальная проекция изображается в виде прямой, параллельной оси $\mathbf{П_2/П_1}$. Если же точка перемещается в плоскости, параллельной $\mathbf{П_2}$, то ее горизонтальная проекция изображается в виде прямой, параллельной той же оси.

Задача 1. *Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня*.

Рассмотрим прямую общего положения АВ, т. е. прямую, расположенную под наклоном ко всем плоскостям проекций (рис. 5.8).

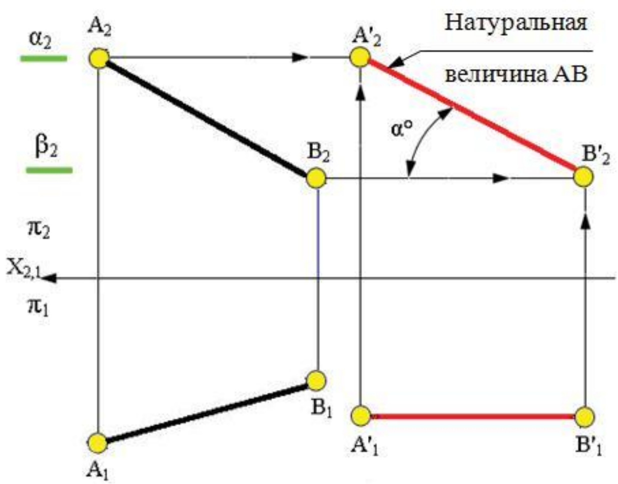



Рис. 5.8. Пример перемещения геометрического элемента (прямая АВ) относительно горизонтальной плоскости проекций

При плоскопараллельном перемещении прямой **АВ** относительно горизонтальной плоскости проекций все его точки движутся в горизонтальных плоскостях уровня **(α и β).** Это значит, что отрезок **АВ** может перемещаться в любое положение, но фронтальные проекции $\mathbf{A_2, B_2}$ могут перемещаться только по проекциям $\boldsymbol{\alpha_2}$ и $\boldsymbol{\beta_2}$ горизонтальных плоскостей уровня, линии которых одновременно служат горизонтальными линиями связи. Так как разность высот концов отрезка сохраняется, то угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций не меняется и горизонтальная проекция отрезка $\mathbf{A_1B_1}$ может перемещаться произвольно по отношению к оси **X,** сохраняя размеры и форму.

В рассматриваемом примере, отрезок **АВ** перемещён до положения фронтали. Горизонтальная проекция фронтали на комплексном чертеже должна быть параллельной оси проекций **X**. Новая горизонтальная проекция отрезка **A'₁B'₁** расположена правее **A₁B₁** параллельно **X**. Из точек **A₁** и **B₁** проведены вертикальные линии связи и в пересечении их с горизонтальными линиями связи отмечены новые фронтальные проекции точек **A'₂** и **B'₂.** Новые проекции **[A'₁ B'₁]** → **[A'₂ B'₂]** изображают отрезок **[AB]** || **П₂**. После преобразования чертежа горизонтальная проекция прямой **AB** стала параллельна плоскости **П₂,** а значит, спроецировалась она на эту плоскость в натуральную величину |**A'₂B'₂**| = **AB**. Угол наклона **(α°)** прямой к **П₁** спроецировался на фронтальной плоскости в натуральную величину. Следовательно, первая задача на преобразование комплексного чертежа решена.

Решим аналогичную задачу относительно фронтальной плоскости проекций П₂. Для этого рассмотрим прямую общего положения **CD,** т. е. прямую, расположенную под наклоном ко всем плоскостям проекций (рис. 5.9).

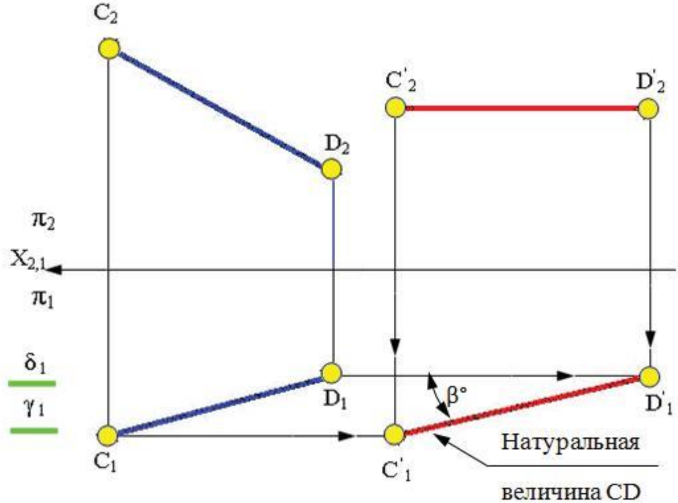



Рис. 5.9. Пример перемещения геометрического элемента (прямая CD) относительно фронтальной плоскости проекций

При плоскопараллельном перемещении прямой **CD** относительно фронтальной плоскости проекций все его точки движутся во фронтальных плоскостях уровня **(γ и δ)**.

При этом горизонтальные проекции точек **$C_1$**и **$D_1$** перемещаются по прямым **($\gamma_1$ и $\delta_1$)**, перпендикулярным вертикальным линиям связи, а фронтальные проекции отрезка **$C_2$ $D_2$** могут перемещаться произвольно относительно оси X, сохраняя свою форму и размеры.

Из точки **$C_1$** проводим горизонтальную линию связи, а из точки **$C_2{}'$**, — вертикальную линию связи, на пересечении которых и будет новое положение горизонтальной проекции **$C'_1$**. Аналогично проведем горизонтальную линию связи из точки **$D_1$** до пересечения с вертикальной линией связи, проведенной из точки **$D'_2$**. Новое положение горизонтальной проекции точки **D**получим на пересечении этих линий в точке **$D'_1$.**

После преобразования чертежа горизонтальная проекция прямой **CD** стала параллельна плоскости **$\Pi_1$**, а значит, спроецировалась она на эту плоскость в натуральную величину, а угол наклона прямой к **$\Pi_2$** на горизонтальной плоскости проекций тоже спроецировался в натуральную величину т.е. в результате получено ещё одно решение первой задачи на преобразование комплексного чертежа.

Решим вторую задачу на преобразование комплексного чертежа.

Задача 2. *Преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую.*

Для решения такой задачи необходимо выполнить два преобразования комплексного чертежа.

Если объект (например, прямые **AB** или **CD**) расположен относительно плоскостей проекций в общем положении (наклонен по отношению к плоскостям проекций под углами отличными от 90°), необходимо выполнить первое преобразование – переместить объект в положение, параллельное одной из плоскостей проекций, т. е. решить первую задачу на преобразование, а затем выполнить второе преобразование комплексного чертежа – натуральную величину прямой расположить перпендикулярно плоскости проекций, т.е. преобразовать параллельное положение прямой относительно плоскости проекций в перпендикуляр-ное (проецирующее).

Рассмотрим решение второй позиционной задачи на примере прямой **(AB)** общего положения (рис. 5.10).

*Первая ступень решения* – прямую общего положения **AB** переместить до положения фронтали **$A'_1B'_1$.** При решении необходимо помнить, что **$A_1B_1= A'_1B'_1$**. Вторая ступень решения – прямую **AB** из положения фронтали переместить в положение горизонтально-проецирующей прямой **$A''_2B''_2$**. В этом случае при построении необходимо помнить, что **$A'_1B'_1 = A''_2B''_2$** и горизонтально проецирующая прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, а на комплексном чертеже **$A''_2B''_2 \perp x$**.

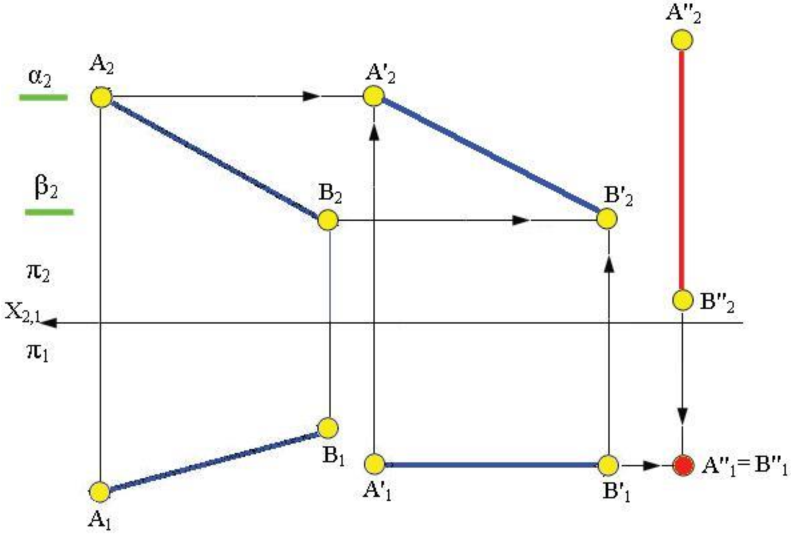



Рис. 5.10. Пример преобразования прямой общего положения в положение горизонтально-проецирующей

При решении третьей позиционной задачи необходимо преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей.

Задача 3. *Преобразовать плоскость общего положения* (ABC) *в проецирующую плоскость*.

Для решения задачи выбрана плоскость общего положения, заданная двумя проекциями **$A_1B_1C_1$** и **$A_2B_2C_2$** (рис. 5.11). При решении необходимо помнить и использовать два положения:

- две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости;

- прямую линию уровня можно одним преобразованием сделать проецирующей (перпендикулярной) к одной из плоскостей проекций.

Первая ступень решения – построить во фронтальной плоскости треугольника фронтальную проекцию горизонтали **$h_2$**, а затем горизонтальную проекцию горизонтали **$h_1$**.

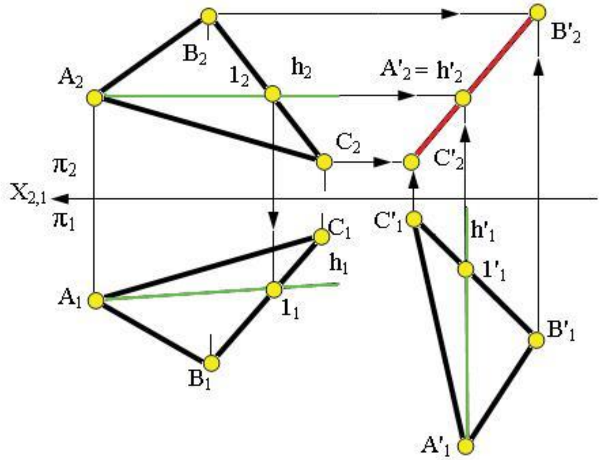



Рис. 5.11. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую

Вторая ступень решения – переместить горизонтальную проекцию плоскости треугольника таким образом, чтобы горизонтальная проек-ция горизонтали стала фронтально проецирующей прямой. Для этого в любом удобном для построения месте построить **h'₁** и на этой прямой отложить величину **A'₁1'₁=A₁1₁**, На этом отрезке построить треугольник **A'₁B'₁C'₁ = A₁B₁C₁** таким образом, чтобы обход вершин осуществлялся в одном направлении. Для чего необходимо провести дуги окружностей из точки **1'₁** радиусом **1'₁C'₁ = 1₁C₁**, а из точки **A'₁**, радиусом **A'₁C'₁**. В пе-ресечении построенных дуг обозначить точку **C '₁**, с учётом направле-ния обхода вершин. Провести прямую **1'₁C'₁** и на ней отложить прямую линию **C'₁B'₁ = C₁B₁**. Положение вершин определено. Нужно соединить
вершину **A'₁** с вершинами **B'₁** и **C'₁.**

Третья ступень решения. По линиям связи построить фронтальную проекцию плоскости треугольника **A'₂B'₂C'₂**. Для этого из точки **C'₁** про-вести вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальной лини-ей связи из точки **C₂**. В пересечении горизонтальной и вертикальной ли-ний связи получится **C'₂.** Из точки **A'₁** провести вертикальную линию связи, а из **A₂** провести горизонтальную линию связи. В пересечении ука-занных линий получится **A'₂**. Аналогичным способом построить **B'₂**. Со-единить полученные проекции точек. В результате получается фронталь-но проецирующая плоскость. Значит, решена третья позиционная задача.

Задача 4.*Преобразовать комплексный чертеж плоскости общего положения в плоскость уровня* (рис. 5.12).

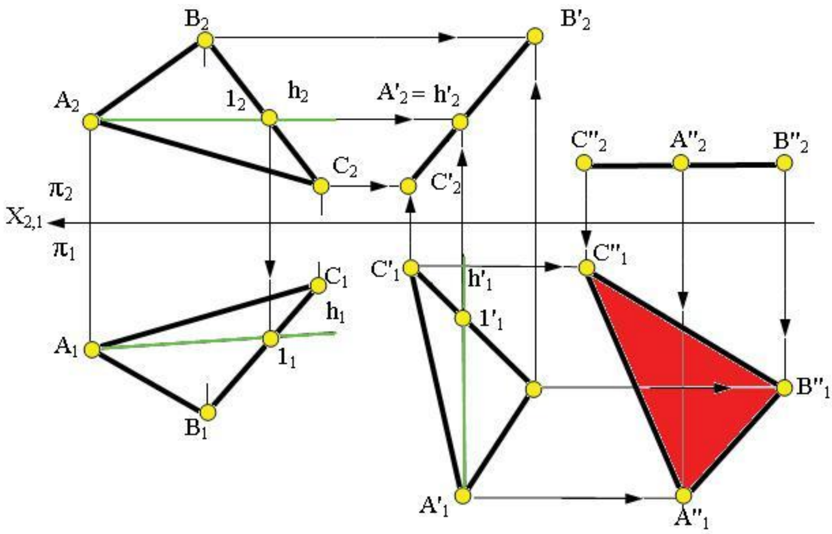



Рис. 5.12. Пример решения четвёртой позиционной задачи способом плоскопараллельного перемещения

Четвёртую позиционную задачу относительно плоскости общего положения нельзя решить без решения третьей позиционной задачи. Для решения четвёртой задачи необходимо выполнить два перемеще-ния заданной плоскости относительно плоскостей проекций.

Учитывая имеющееся решение третьей задачи. Рассмотрим пример решения четвертой задачи на основе решения предыдущей (третьей) задачи. Решаем четвёртую позиционную задачу, перемещая фигуру относительно фронтальной плоскости проекций до положения плоскости треугольника $\mathbf{A''_2B''_2C''_2 \perp C'_1C'_2}$. В таком положении плоскость находится параллельно горизонтальной плоскости проекций т.е. плоскость становится плоскостью горизонтального уровня.

Горизонтальная проекция $\mathbf{A''_1B''_1C''_1}$ плоскости определяется в пересечениях вертикальных линий связи с горизонтальными. Недостатком способа плоскопараллельного перемещения является необходимость построения свободно перемещаемой проекции в новом положении. Достоинством этого способа можно считать возможность удобного размещения новых проекций на комплексном чертеже.

## 5.5. Способ вращения. Вращение вокруг проецирующей прямой

Сущность этого способа заключается в том, что система плоскостей проекций $П_2/П_1$ остается неподвижной, а положение геометрических элементов изменяется путем вращения вокруг одной или двух выбранных осей до нужного положения в данной системе. В качестве оси вращения в этом случае удобнее всего выбирать проецирующие прямые или прямые уровни, тогда точка будет вращаться в плоскостях, параллельных или перпендикулярных плоскостям проекций.

При вращении используются следующие элементы вращения:

– ось вращения – прямая, вокруг которой осуществляется вращение.

– плоскость вращения – плоскость, проходящая через вращаемую точку и перпендикулярная оси вращения (плоскость окружности, которую описывает точка при вращении).

– центр вращения – точка пересечения оси вращения и плоскости вращения.

– радиус вращения – кратчайшее расстояние от вращаемой точки до центра (оси) вращения. Радиус всегда перпендикулярен оси вращения.

– угол поворота – угол между начальным и конечным положением радиуса вращения.

При вращении системы точек вокруг одной оси все точки вращаются в плоскостях, параллельных между собой, поворачиваются на один и тот же угол в одном и том же направлении, поэтому вращение является частным случаем плоскопараллельного перемещения. Точки, находящиеся на оси вращения остаются неподвижными.

Способ вращения состоит в том, что данная геометрическая фигура вращается вокруг некоторой неподвижной оси до требуемого положения относительно неподвижных плоскостей проекций. При этом каж-дая точка фигуры, например точка **A** (рис. 5.13), описывает окружность, расположенную в плоскости **β**, перпендикулярной оси вращения **i**. Центр **O** этой окружности является точкой пересечения оси вращения с плоскостью **β**. Радиус окружности равен расстоянию точки **A** до оси **i** **(|R| = |AO|)**.

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций, ее фронтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а горизонтальная – по окружности, центром которой является горизонтальная проекция оси вращения.

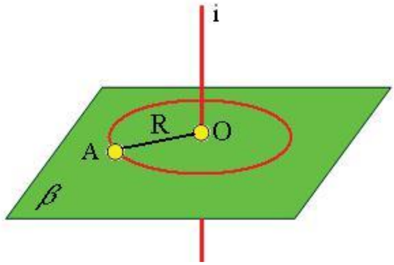



Рис. 5.13. Пример вращения точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, ее горизонтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а фронтальная – по окружности, центром которой является фронтальная проекция оси вращения (рис. 5.14).

Рассмотрим вращение точки $\mathbf{A(A_1,A_2,A_3)}$ вокруг горизонтально проецирующей прямой $\mathbf{i\ (i_1,i_2,i_3)}$.

При вращении точка описывает окружность, плоскость которой $\mathbf{\beta(\beta_2)}$ перпендикулярна оси $\mathbf{i\ (i_1,i_2,i_3)}$. Поскольку $\mathbf{i \perp П_1}$, а $\mathbf{\beta(\beta_2) \perp i}$, $\mathbf{\beta(\beta_2)}$ // $\mathbf{П_1}$ и угол поворота проецируется на $\mathbf{П_1}$ в натуральную величину.

Рассмотрим вращение точки $\mathbf{A(A_1,A_2,A_3)}$ вокруг горизонтально проецирующей прямой $\mathbf{i\ (i_1,i_2,i_3)}$.

При вращении точка описывает окружность, плоскость которой $\mathbf{\beta(\beta_2)}$ перпендикулярна оси $\mathbf{i\ (i_1,i_2,i_3)}$. Поскольку $\mathbf{i \perp П_1}$, **а** $\mathbf{\beta(\beta_2) \perp i}$, $\mathbf{\beta(\beta_2)}$ // $\mathbf{П_1}$ и угол поворота проецируется на $\mathbf{П_1}$в натуральную величину.

Таким образом, при вращении вокруг горизонтально проецирующей прямой $\mathbf{i(i_1,i_2)}$ проекции точки $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A'_1}$, $\mathbf{A''_1}$, $\mathbf{A'''_1}$ перемещаются по окружности $\boldsymbol{\ell_1}$ с центром в точке $\mathbf{O_1}$ и радиусом $\mathbf{R = R_1 = OA = O_1A_1}$, фронтальные проекции $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A'_2}$, $\mathbf{A''_2}$, $\mathbf{A'''_2}$ перемещается по проекции фронтального следа плоскости $\mathbf{\beta_2}$ в пределах отрезка $\mathbf{[A_2,A''_2]}$.

Рассмотрим вращение точки $\mathbf{A(A_1,A_2,A_3)}$ вокруг горизонтально проецирующей прямой $\mathbf{i(i_1,i_2,i_3)}$.

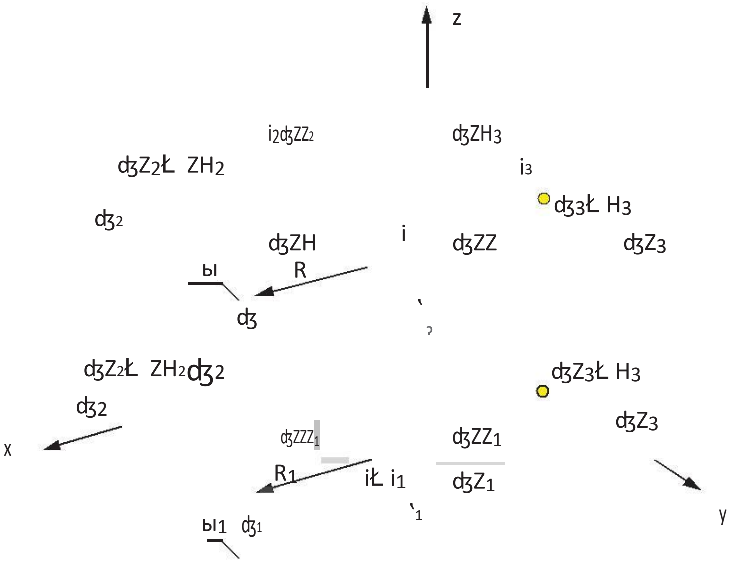



Рис. 5.14. Пример вращения точки А вокруг горизонтально проецирующей прямой i (i $\perp$ П$_1$)

При вращении точка описывает окружность, плоскость которой **$\beta(\beta_2)$** перпендикулярна оси **$i(i_1,i_2,i_3)$**. Поскольку **i $\perp$ П, а $\beta(\beta_2) \perp$ i, $\beta(\beta_2)$ // П$_1$** угол поворота проецируется на **П$_1$**в натуральную величину.

Таким образом, при вращении вокруг горизонтально проецирую-щей прямой **$i(i_1,i_2)$** проекции точки **А$_1$, А'$_1$, А"$_1$, А"'$_1$**перемещаются по окружности **$\ell_1$** с центром в точке **О$_1$** и радиусом **R = R$_1$= ОА = О$_1$А$_1$**, фронтальные проекции **А$_2$, А'$_2$, А"$_2$, А"'$_2$** перемещается по проекции фронтального следа плоскости **$\beta_2$** в пределах отрезка **[А$_2$, А"$_2$].**

Если точка **А** вращается вокруг оси **i $\perp$ П$_1$**, то плоскость **$\beta$**, в которой располагается окружность, описываемая точкой, становится горизонтальной плоскостью уровня **($\beta$ || П$_1$)**.

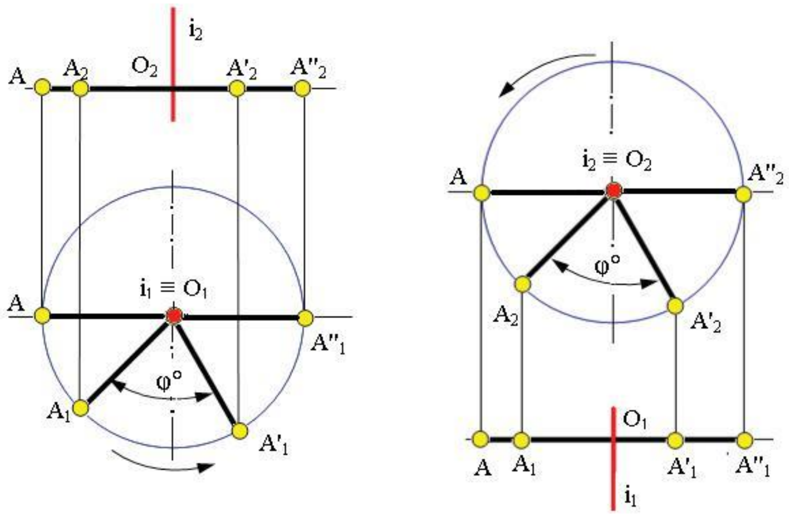
Следовательно, окружность, описываемая точкой **А** в пространстве, спроецируется на плоскость **П$_1$** без искажения, а на плоскость **П$_2$** – в отрезок прямой **А$_2$ А"$_2$**, совпадающей с фронтальным следом плоскости **$\beta_2$**.

Таким образом, вращение точки **A** вокруг горизонтально проецирующей прямой **i(i$_1$,i$_2$)** на комплексном чертеже (рис. 5.15.а) изображено следующим образом:

1) горизонтальная проекция **A$_1$**, точки **A** перемещается по окружности радиуса **| R | = | AO | = | A$_1$O$_1$ |;**

2) фронтальная проекция A$_2$ точки A перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи (вырожденная фронтальная проекция **β$_2$** плоскости **β ‖ П$_1$**);

3) угол поворота **φ°** горизонтальной проекции **A$_1$** точки **A** равен углу поворота точки в пространстве.




а б

Рис. 5.15. Вращение точки А вокруг горизонтально проецирующей (а) и фронтально проецирующей (б) прямых

Вращение точки А вокруг фронтально проецирующей прямой **i(i$_1$,i$_2$)** на комплексном чертеже (рис. 5.15.б) изображено следующим образом:

4) фронтальная **A$_2$**, точки **A** перемещается по окружности радиуса **R = | AO | = | A$_2$O$_2$** |;

5) горизонтальная проекция **A$_1$** точки **A** перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи (вырожденная горизонтальная проекция **β$_1$** плоскости **β ‖ П$_2$);**

6) угол поворота **φ°** фронтальной проекции точки **А** равен углу поворота точки в пространстве.

Способом вращения тоже можно решать все основные на преобразование комплексного чертежа.

**Задача 1.** *Преобразовать прямую общего положения в линию уровня*.

Для того чтобы прямую общего положения $\boldsymbol{\ell(\ell_1, \ell_2)}$ преобразовать, например, во фронталь, ее необходимо вращать около оси $\mathbf{i} \perp \mathbf{\Pi_1}$ (рис. 5.16).

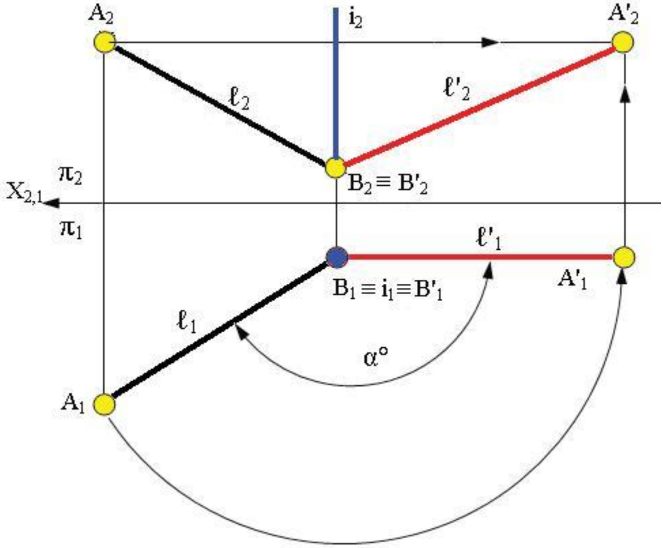



Рис. 5.16. Преобразование прямой линии общего положения во фронтальную (фронталь) прямую

Для решения задачи необходимо:

1) выбрать две точки $\mathbf{A(A_1A_2)}$ и $\mathbf{B(B_1B_2)}$, принадлежащие прямой $\boldsymbol{\ell}$;

2) провести ось вращения $\mathbf{i(i_1,i_2)}$ перпендикулярно $\mathbf{\Pi_1}$ через точку $\mathbf{B(B_1B_2)}$ прямой $\boldsymbol{\ell(\ell_1, \ell_2)}$;

3) при вращении прямой $\boldsymbol{\ell}$ вокруг оси **i** точка **B** прямой останется неподвижной, так как принадлежит оси, а точка **А** будет вращаться по правилам, рассмотренным выше;

4) угол поворота **α°** точки **А** и ее горизонтальной проекции $\mathbf{A_1}$ определяется между положением проекций $\mathbf{A_1B_1}$ и $\mathbf{A'_1B'_1}$.

Когда прямая **ℓ** займет положение параллельное **$П_2$**, ее горизонтальная проекция **$ℓ'_1$** расположится перпендикулярно линиям связи.

Для определения положения проекции **$A'_2$** необходимо из **$A'_1$** провести вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальной линией связи из фронтальной проекции **$A_2$.** Пересечение этих двух линий связи определит новое положение проекции точки **$A'_2$**.

Соединив между собой новые проекции точек, получим **$B'_2A'_2$** натуральную величину прямой **ℓ**, что является решением первой задачи на преобразование комплексного чертежа.

Для преобразования прямой **ℓ** общего положения в горизонталь, ее необходимо вращать около оси **i,** перпендикулярной **$П_2$** и проходящей через какую-либо точку прямой (рис. 5.17).

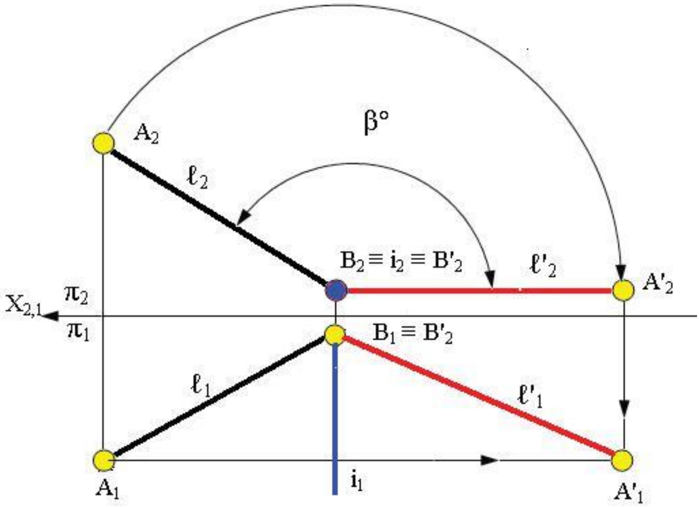



Рис. 5.17. Преобразование прямой линии общего положения в горизонтальную (горизонталь) прямую

Для преобразования, заданной прямой, необходимо:

1) выбрать две точки **$A(A_1A_2)$** и **$B(B_1B_2)$**, принадлежащие прямой **ℓ**;

2) провести ось вращения **i ($i_1$,$i_2$)** перпендикулярно **$П_2$** через точку **$B(B_1B_2)$** прямой **ℓ($ℓ_1$, $ℓ_2$)**;

3) при вращении прямой **ℓ** вокруг оси i точка **B** прямой остаётся неподвижной, так как принадлежит оси, и новое её положение будет с ней

совпадать **$B_2 \equiv B'_2$**, а точка **A** будет вращаться по правилам, рассмотренным выше;

4) угол поворота **β°** точки **A** и ее фронтальной проекции **$A_2$** определяется между положением проекций **$A_2B_2$** и **$A'_2B'_2$**, когда прямая **ℓ** займет положение, параллельное **$П_1$**, ее фронтальная проекция **$ℓ'_2$** расположится перпендикулярно линиям связи.

Для определения положения проекции **$A'_1$** необходимо из **$A'_2$** провести вертикальную линию связи до пересечения с горизонтальной линией связи из **$A_1$**. Пересечение этих двух линий связи определит новое положение проекции точки **$A'_1$**. Соединив между собой новые проекции точек, получим **$B'_1A'_1$** натуральную величину прямой **ℓ**, что является решением первой задачи на преобразование комплексного чертежа.

**Задача 2.** *Преобразовать линию общего положения в проецирующую прямую* (рис.5.18).

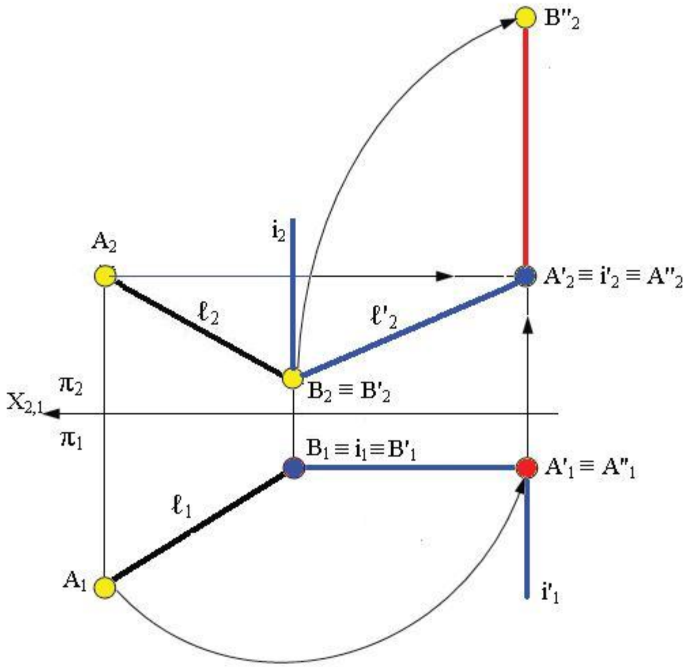



Рис. 5.18. Преобразование прямой линии общего положения в горизонтально проецирующую

Вторую задачу на преобразование комплексного чертежа решать без решения первой задачи нельзя. Поэтому, если дана прямая общего положения, то для решения второй задачи необходимо выполнить два последовательных преобразования: вначале преобразовать ее в линию уровня (см. первую задачу), а затем линию уровня преобразовать в проецирующую (рис. 5.18, 5.19). Если линия уровня является фронталью, то ее можно преобразовать в горизонтально проецирующую прямую вращением около оси **i’** перпендикулярной **П2** (рис. 5.18). В рассматриваемом случае необходимо ось вращения провести через точку **A’’**. Во фронтальной плоскости проекций **A’2 ≡ i’2 ≡ A’’2**. Для определения нового положения точки **B** необходимо **B’2** повернуть вокруг **i’2** до положения **B’’2**. Соединив между собой новые проекции точек, получим **B’’2A’’2**, прямую перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций (горизонтально проецирующую), что является решением второй задачи на преобразование комплексного чертежа.

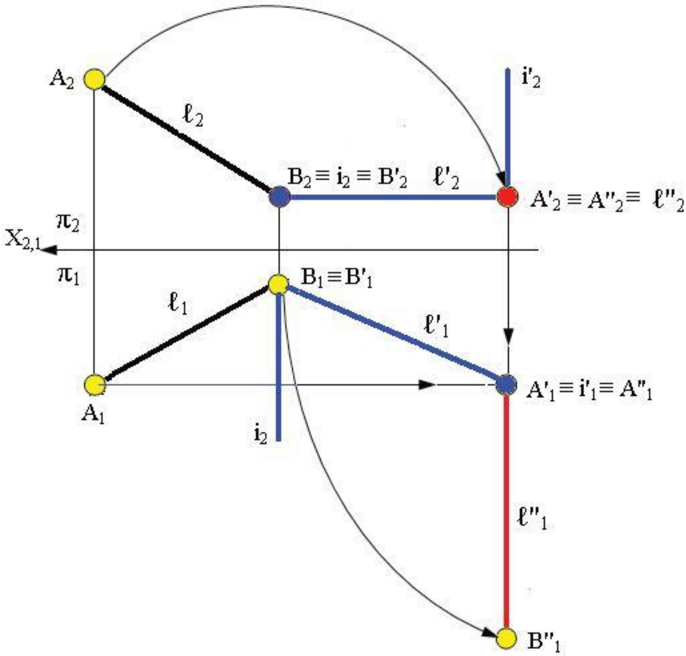



Рис. 5.19. Преобразование прямой общего положения во фронтально-проецирующую

Если линия уровня является горизонталью, то ее можно преобразовать во фронтально проецирующую прямую вращением около оси **i’** перпендикулярной **П₁** (рис. 5.19). В рассматриваемом случае необходимо ось вращения провести через точку **A’’**.

В горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{A'_1 \equiv i'_1 \equiv A''_1}$. Для определения нового положения точки **B** необходимо $\mathbf{B'_1}$ повернуть вокруг $\mathbf{i'_1}$ до положения $\mathbf{B''_1}$. Соединив между собой новые проекции точек, полу-чим $\mathbf{B''_1A''_1}$, прямую перпендикулярную фронтальной плоскости про-екций (фронтально проецирующую), что является решением второй за-дачи на преобразование комплексного чертежа.

**Задача 3.** *Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения* Σ( ABC) *после поворота стала проецирующей* (рис. 5.20).

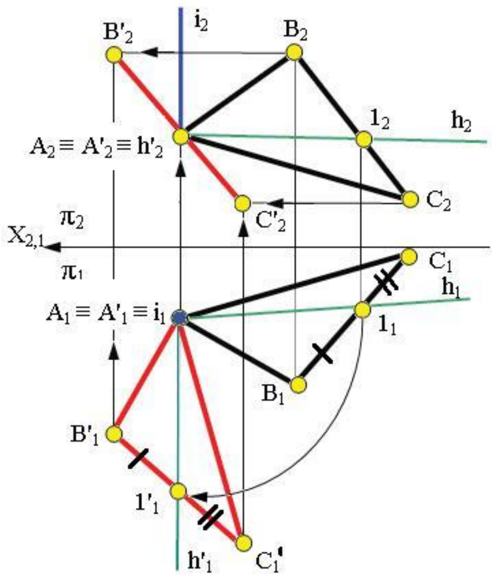



Рис. 5.20. Преобразование плоскости Σ( ABC) во фронтально-проецирующую

При решении таких задач необходимо знать, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Таким образом, если какую-либо прямую, принадлежащую плоскости **Г**, преобразовать в проецирующую, то плоскость **Г** тоже станет проецирующей.

Для того чтобы плоскость преобразовать во фронтально проецирующую, ее необходимо вращать вокруг оси **i** ⊥ $\mathbf{П_1}$, а в качестве вспомогательной линии уровня взять горизонталь. Для решения этой задачи можно использовать плоскость треугольника **ABC**. Если плоскость **Г( ABC)** вращать вокруг оси **i** ⊥ $\mathbf{П_1}$, то горизонталь **(h)**, принадлежа-щая плоскости, может быть повернута в положение, перпендикулярное плоскости $\mathbf{П_2}$, при этом плоскость **Г** станет фронтально проецирующей (рис. 5.20).

Построения новой горизонтальной проекции $\mathbf{A'_1B'_1C'_1}$ треугольника **ABC** в плоскости нужно провести горизонталь $\mathbf{(A_11_1)}$, которую одним поворотом сделать проецирующей прямой. За ось вращения **i** можно при-нять горизонтально проецирующую прямую, которую для удобства ре-шения, провести через точку (А), принадлежащую плоскости. В горизон-тальной плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ проекции исходного и нового положения точки **A** и оси вращения совпадают $\mathbf{A_1 \equiv A'_1 \equiv i_1}$. При повороте точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{C_1}$ вокруг $\mathbf{i_1}$ величина их угла поворота равна величине угла поворота го-ризонтальной проекции горизонтали $\mathbf{h_1}$. В результате поворота треуголь-ник **A'B'C'** оказывается перпендикулярным $\mathbf{П_2}$ и поэтому его фронталь-ная проекция $\mathbf{B'_2A_2C'_2}$ вырождается в прямую линию, построение которой необходимо выполнить по правилам, рассмотренным выше.

Фронтальные проекции начального и нового положений точки **A** совпадают $\mathbf{A_2 \equiv A'_2}$. Положения точек $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{C_2}$ определяются в пересечении вертикальных и горизонтальных линий связи соответствующих точек. Для определения положения $\mathbf{B'_2}$ необходимо из $\mathbf{B'_1}$провести вертикальную, а из $\mathbf{B_2}$ горизонтальную линии связи. Для определения положения $\mathbf{C'_2}$ необходимо из $\mathbf{C'_1}$ провести вертикальную, а из $\mathbf{C_2}$ горизонтальную линии связи. Новые положения точек плоскости **Г** во фронтальной плоскости проекций $\mathbf{П_2}$ находятся на одной прямой, что подтверждает условие перпендикулярности **Г** ⊥ $\mathbf{П_2}$ и решение третьей задачи на преобразование комплексного чертежа.

Для того чтобы плоскость Σ преобразовать в горизонтально проецирующую, её необходимо вращать вокруг оси **i** ⊥ $\mathbf{П_2}$, а в качестве вспомогательной линии уровня взять фронталь (рис. 5.21).

В качестве плоскости Σ можно использовать треугольник **DEK.** Если плоскость **Σ (DEK)** вращать вокруг оси **i** ⊥ $\mathbf{П_2}$, то фронталь (**f**), принадлежащая плоскости, может быть повернута в положение, перпендикулярное плоскости $\mathbf{П_1}$, при этом плоскость **Σ** станет горизонтально проецирующей (рис. 5.21).

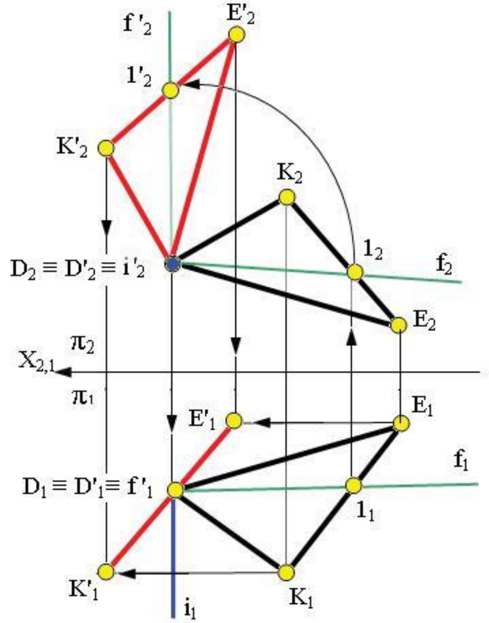



Рис. 5.21. Преобразование плоскости Σ (  ABC) в горизонтально- проецирующую

Для построения новой горизонтальной проекции **D'₂E'₂K'₂** треугольника **DEK** в плоскости нужно провести фронталь, которую одним поворотом сделать проецирующей прямой. За ось вращения **i** можно принять фронтально проецирующую прямую, которую для удобства решения, провести через точку (**D**), принадлежащую плоскости.

Во фронтальной плоскости проекций $\Pi_2$ проекции исходного и нового положения точки **D** и оси вращения совпадают $D_2 \equiv D'_2 \equiv i_2$. При повороте точек $E_2$ и $K_2$ вокруг $i_2$ величина их угла поворота равна величине угла поворота фронтальной проекции фронтали $f_2$.

В результате поворота треугольник **D'E'K'** оказывается перпендикулярным $\Pi_1$ и поэтому его горизонтальная проекция $D'_1$ $E1_1$ $K'_2$ вырождается в прямую линию, построение которой необходимо выполнить по правилам, рассмотренным выше.

Горизонтальные проекции начального и нового положений точки **D** совпадают $D_1 \equiv D'_1$. Положения точек $E_1$ и $K_1$ определяются в пересечении вертикальных и горизонтальных линий связи соответствующих точек. Для определения положения **E’$_1$** необходимо из **E$_1$** провести горизонтальную, а из **E’$_2$** вертикальную линии связи. Для определения положения **K’$_1$** необходимо из **K$_1$** провести горизонтальную, а из **K’$_2$** верти-кальную линии связи. Новые положения точек плоскости **Σ** в горизон-тальной плоскости проекций **П$_1$** расположены на одной прямой, что подтверждает условие перпендикулярности **Σ** $\perp$ **П$_1$**и решение третьей задачи на преобразование комплексного чертежа.

## 5.6. Вращение вокруг линии уровня (совмещениес плоскостью уровня)

Если в качестве оси вращения использовать линию уровня, то истинную величину плоской фигуры общего положения можно построить одним поворотом, не выполняя двойного преобразования чертежа, что имело место в замене плоскостей проекций, плоскопараллельном перемещении и вращении вокруг проецирующей прямой. Решение задач вращением геометрических фигур вокруг линии уровня (горизонтали или фронтали) производится с целью совмещения этих фигур с плоскостью уровня . На этом способе основано построение разверток цилиндрических и призматических поверхностей способом раскатки.

Рассмотрим на рис. 5.22 пример вращения точки **B** вокруг горизонтали **h**.

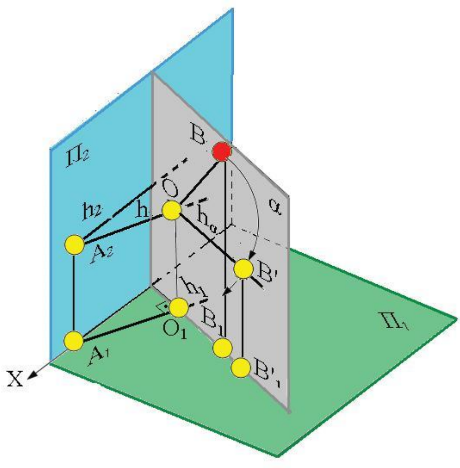



Рис. 5.22. Пример вращения точки **B** вокруг горизонтали **h**

Точка **B,** при вращении вокруг горизонтальной линии уровня **h,** перемещается по окружности, плоскость которой (**α**) перпендикулярна к линии уровня **h** и, соответственно, $\alpha_1 \perp h_1$. Точка **B** описывает окружность радиусом **OB** и проецируется на горизонтальную плоскость проекций $\Pi_1$ в виде отрезка прямой, а на $\Pi_2$ в виде эллипса. В рассматриваемом случае ось вращения – горизонталь, следовательно, траектория точки **B** будет находиться в горизонтально-проецирующей плоскости.

Для того, чтобы на комплексном чертеже переместить точку **B** путём вращения вокруг линии уровня, нужно знать центр вращения и величину радиуса вращения. Центр вращения известен. Он находится в точке пересечения линии уровня с плоскостью, в которой вращается точка **B**. Для определения величины радиуса вращения **OB** необходимо воспользоваться способом прямоугольного треугольника (рис. 5.23).

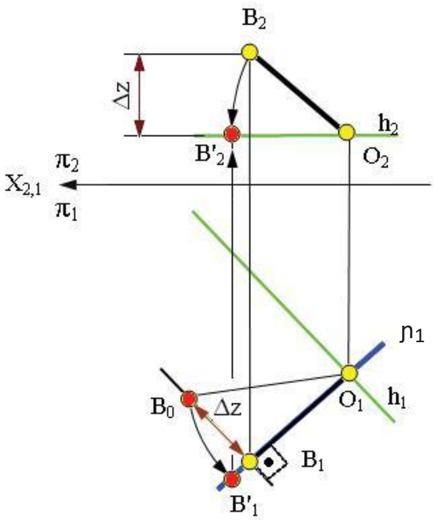



Рис. 5.23. Пример перемещения точки **B** вокруг горизонтали **h** на комплексном чертеже

Для определения натуральной величины радиуса в плоскости $\Pi_1$ необходимо построить прямоугольный треугольник $O_1B_1\ B_0$. Для этого за первый катет принимаем горизонтальную проекцию $[O_1\ B_1]$ радиуса **OB**; второй катет равен разности аппликат концов отрезка **OB** $|z_B - z_B'|$.

Гипотенуза треугольника $\mathbf{O_1B_1B_0}$ это $\mathbf{O_1B_0 = R}$. Новое, после поворота, положение точки $\mathbf{B'_1}$ находится в месте пересечения дуги окружности, проведённой из горизонтальной проекции центра вращения $\mathbf{O_1}$, радиусом, равным $\mathbf{[O_1\ B_0]}$ с горизонтальным следом $\mathbf{h^0_\alpha}$ горизонтально-проецирующей плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ в которой вращается точка **B**. Следующий пример представлен на рис. 5.24.

В этом примере рассмотрено применение способа вращения точки вокруг линии уровня при определении натуральной величины плоскости общего положения.

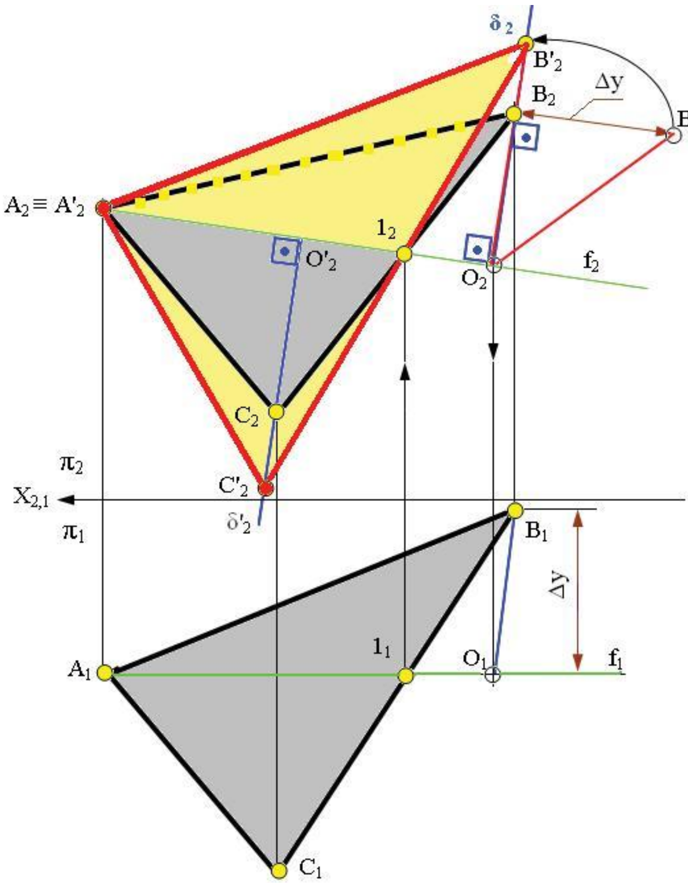



Рис. 5.24. Пример вращения плоскости вокруг фронтали

В этом случае применяется другая линия уровня – фронталь **f**, которую нужно провести в плоскости. Такая задача решается аналогично предыдущей задаче, но в ней положения точек **A** и **1** не меняются, потому что через них проходит фронталь, а определить необходимо новые положения точек **B** и **C**, вращающихся вокруг фронтали до положения параллельного с фронтальной плоскостью проекций $\mathbf{\Pi_2}$.

Вращение плоскости треугольника **ABC** сводится к вращению только одной ее точки, например вершины **B**, не принадлежащей оси вращения, так как положение плоскости в пространстве определяется тремя известными точками **A, B** и **1**.

Для определения нового положения точки **B**, определяется центр её вращения $\mathbf{O_2}$. Для этого из точки $\mathbf{B_2}$ на фронтальную проекцию фронтали $\mathbf{f_2}$ необходимо опустить перпендикуляр, который является радиусом вращения точки B вокруг фронтали, а затем по линии связи определить горизонтальную проекцию центра вращения $\mathbf{O_1}$.

Когда в результате вращения точка **B** окажется в плоскости **δ**, т. е. параллельной фронтальной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_2}$, ее фронтальная проекция $\mathbf{B_2}$ будет удалена от фронтальной проекции оси вращения $\mathbf{f_2}$ на расстояние, равное натуральной величине радиуса вращения точки **B**.

Натуральную величину радиуса вращения можно определить как гипотенузу $\mathbf{B_2B_0}$прямоугольного треугольника (см. раздел 4.5), одним катетом которого является фронтальная проекция радиуса $\mathbf{B_2O_2}$, а вторым – разность координат **y** точек $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{O_1}$. Для определения нового положения точки $\mathbf{B'_2}$, полученную величину, вращением вокруг центра $\mathbf{O_2}$ перенести на проекцию плоскости $\delta_2$.

Новое положение $\mathbf{C'_2}$ вершины **C** определяется как точка пересечения прямой **B'1** с плоскостью **δ'**, в которой перемещается точка **C**. Новая фронтальная проекция $\mathbf{C'_2}$ точки $\mathbf{C_2}$ определится как точка пересечения фронтальной проекции ($\mathbf{B_2'1_2}$) прямой (**B'1**) с фронтальной проекцией $\mathbf{\delta'_2}$ плоскости **δ**.

Треугольник **A'B'C'** параллелен $\mathbf{\Pi_2}$, следовательно, $\mathbf{A_2B_2C_2 \equiv ABC}$.

## Вопросы для самоконтроля

*1. Какие способы преобразования чертежей используют в курсе начертательной геометрии?*

*2. В чём состоит принцип способа замены плоскостей проекций?*

*3. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы прямую общего положения преобразовать в: а) прямую уровня; б) проецирующую прямую.*

*4. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы плоскость общего положения преобразовать в: а) проецирующую; б) плоскость уровня?*

*5. Как определяется направление плоскости проекций при преобразовании плоскости общего положения в плоскость фронтально-проецирующую?*

*6. Каков алгоритм решения задачи при определении углов наклона плоскости к плоскостям проекций способом замены плоскостей проекций?*

*7. Каков алгоритм решения задачи при определении натуральной величины плоскости общего положения способом замены плоскостей проекций?*

*8. Каков принцип способа вращения вокруг проецирующих прямых линий?*

*9. Какую прямую принимают за ось вращения при преобразовании плоскости общего положения в горизонтально-проецирующую?*

*10. Какую прямую принимают за ось вращения при преобразовании плоскости общего положения во фронтально-проецирующую?*

*11. Каков алгоритм определения натуральной величины плоскости способом плоскопараллельного перемещения?*

*12. Каков алгоритм определения натуральной величины плоскости способом вращения вокруг прямых, параллельных плоскостям проекций?*

*13. Какие основные метрические задачи можно решать с помощью дополнительного проецирования?*

# 6. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

## 6.1. Общие положения

**Метрическими** называются задачи, связанные с измерением расстояний и углов. В них определяются действительные величины и форма геометрических фигур, расстояния между ними и другие характеристики по их метрически искаженным проекциям. Решение метрических задач основано на том, что геометрическая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на нее в конгруэнтную ей фигуру (см. свойства параллельного проецирования параграф 1.3). Поэтому при решении метрических задач широко используются способы преобразования комплексного чертежа.

Рассмотрим три группы метрических задач. К первой относятся задачи, в которых требуется найти расстояние между двумя геометрическими фигурами; ко второй – задачи на определение действительных величин плоских фигур и углов; к третьей группе принадлежат задачи, связанные с построением в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам.

## 6.2. Определение расстояний между геометрическими фигурами

Искомое расстояние во всех задачах этой группы измеряется дли-ной отрезка, заключенного между заданными геометрическими фигура-ми и перпендикулярного к одной из них или одновременно к обеим. Этот отрезок проецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, которая будет перпендикулярна одной или обеим геометрическим фигурам, между которыми определяется расстояние. Алгоритм решения задач этой группы будет следующим:

1. Одним из способов преобразования комплексного чертежа привести обе заданные геометрические фигуры (или одну из них) в положение, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций.
2. Построить проекцию искомого отрезка на эту плоскость.

Выбирая способ преобразования комплексного чертежа при составлении алгоритма, следует учитывать требования к компактности чертежа, четкость и возможную простоту графических операций.

**Задача 1 .** *Определение расстояния от точки M до прямой AB общего положения* (рис. 6.1).

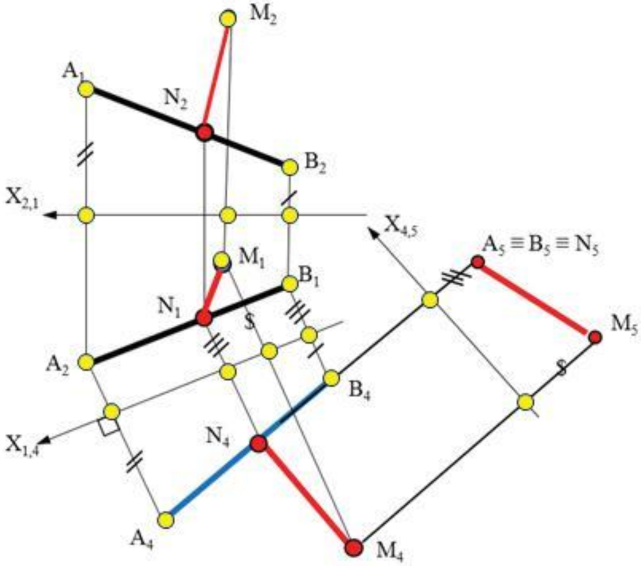



Рис. 6.1. Определение расстояния от точки M до прямой AB

Искомое расстояние измеряется длиной отрезка **/MN/** перпендикуляра, опущенного из точки **M** на прямую **AB**. Отрезок **[MN]** спроецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, перпендикулярную прямой **AB**.

Составляем алгоритм решения:

1. Преобразовать прямую **AB** в проецирующую прямую способом замены плоскостей проекций.

2. Построить проекцию отрезка **[MN]** на плоскость $\Pi_5 \perp AB$, длина которого $M_5N_5$ определяет искомое расстояние.

Для преобразования прямой линии **AB** общего положения в проецирующую линию необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций: вначале прямую линию **AB** преобразовать в линию уровня.

Для этого проведена замена плоскости проекций **П2** на новую плоскость **П4**, перпендикулярную плоскости **П1** и параллельную прямой **AB**. Затем линия уровня преобразована в проецирующую прямую, для чего проведена замена плоскости проекций **П1** на плоскость **П5**, в кото-рой построены проекции **$A_5B_5$** прямой линии **AB** и **$M_5N_5$** искомой линии **MN** в системе плоскостей проекций **П4/П5**.

Отрезок **[$M_5N_5$]** является искомым: **[$M_5N_5$] ≅ [MN]** и /**$M_5N_5$**/ = /**MN**/. На рис. 6.1 показано построение проекций **[$M_4N_4$]**, **[$M_1N_1$]** и **[$M_2M_2$]** отрезка **[MN]** обратным преобразованием.

**Задача 2.**_Определить расстояние между параллельными прямыми a и b_ (рис. 6.2).

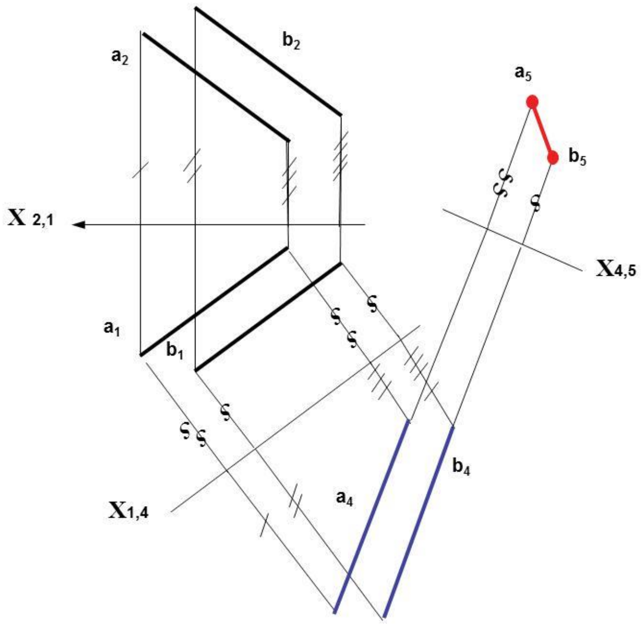



Рис. 6.2. Пример определения расстояния между параллельными прямыми

Для решения задачи необходимо выполнить две замены плоскостей проекций . Вначале прямые **a** и **b** необходимо сделать прямыми уровня **$a_4$ $b_4$**. Для чего плоскость **П4** расположить параллельно **$a_1$** и **$b_1$** для получения натуральной величины **$a_4b_4$** указанных прямых. Затем, перпендикулярно натуральным величинам прямых, ввести новую плоскость **П5** перпендикулярную плоскости **П4**, в которой расположены прямые.

В этом случае расстояние **a₅ b₅** между ними и будет искомой натуральной величиной расстояния между параллельными прямыми **a** и **b** (рис. 6.2).

**Задача 3.** *Определение расстояния от точки до плоскости*.

Решение задачи приведено на рис. 6.3.

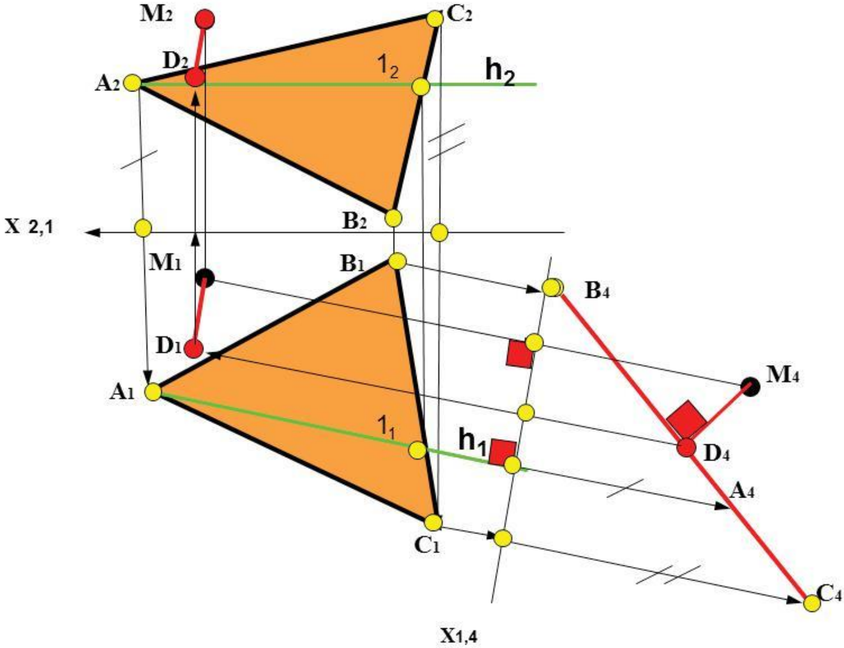



Рис. 6.3. Определение расстояния от точки до плоскости

**Примечания:** 1) Проекция перпендикуляра **$M_1N_1$** в **$П_1$** располагается параллельно **$П_4$**, потому что в плоскости **$П_4$**имеется ее натуральная величина.

2) Задачи 1-3 можно также решать по следующей схеме: вначале определить метрически искаженные проекции искомого отрезка, а затем способом прямоугольного треугольника определить его действительную величину.

Для определения расстояния от точки **M** до плоскости треугольника **ABC** необходимо плоскость треугольника общего положения **ABC** преобразовать в плоскость проецирующую. Для этого нужно произвести замену плоскости проекций **$П_2$** на **$П_4$** перпендикулярно **$h_1$.**

Плоскость **ABC** преобразуется в линию **$C_4A_4B_4$**. На эту же плоскость **$П_4$** спроецируется точка **M ($M_4$)**. Перпендикуляр из **$M_4$** на линию

**$C_4A_4B_4$** будет натуральной величиной расстояния от точки **M** до плоскости **ABC**. Проекции перпендикуляра переносятся в плоскости проек-ций **$П_1$** и **$П_2$** по соответствующим линиям связи, расстояния от точки **M** до плоскости **ABC**. Проекции перпендикуляра переносятся в плоско-сти проекций **$П_1$** и **$П_2$** по соответствующим линиям связи.

**Задача 4.** *Определить угол**φ**междускрещивающимися прямыми **m** и **n**.* Решение задачи приведено на рис. 6.4.

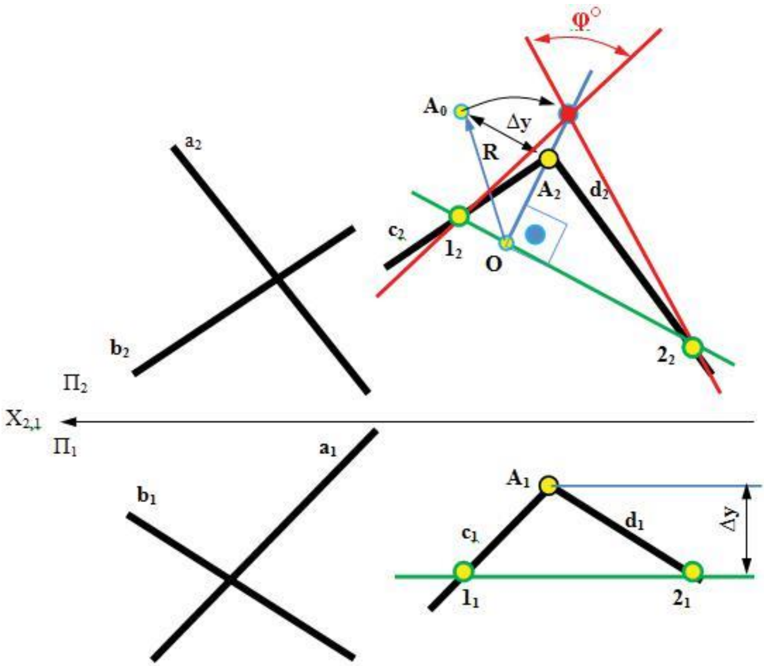



Рис. 6.4. Определение величины угла между двумя скрещивающимися прямыми линиями

Углом, между скрещивающимися прямыми, является плоский угол, образованный прямыми, параллельно заданным скрещивающимся прямым, проведёнными через любую, выбранную точку.

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующие графические построения (рис. 6.4):

- построить плоский угол аналогичный искомому. Взяв за вершину угла на свободном месте чертежа точку **A**, провести прямые **c** ‖ **a** и **d** ‖ **b**;

- построить фронталь (или горизонталь) для плоского угла;

- вращением вершины плоского угла вокруг фронтали (или горизонтали) найти его величину **φ**.

**Задача 5.** *Определить расстояние между скрещивающимися прямыми **a** и **b**.* Предложенную задачу можно решить с помощью преобразования комплексного чертежа (рис. 6.5).

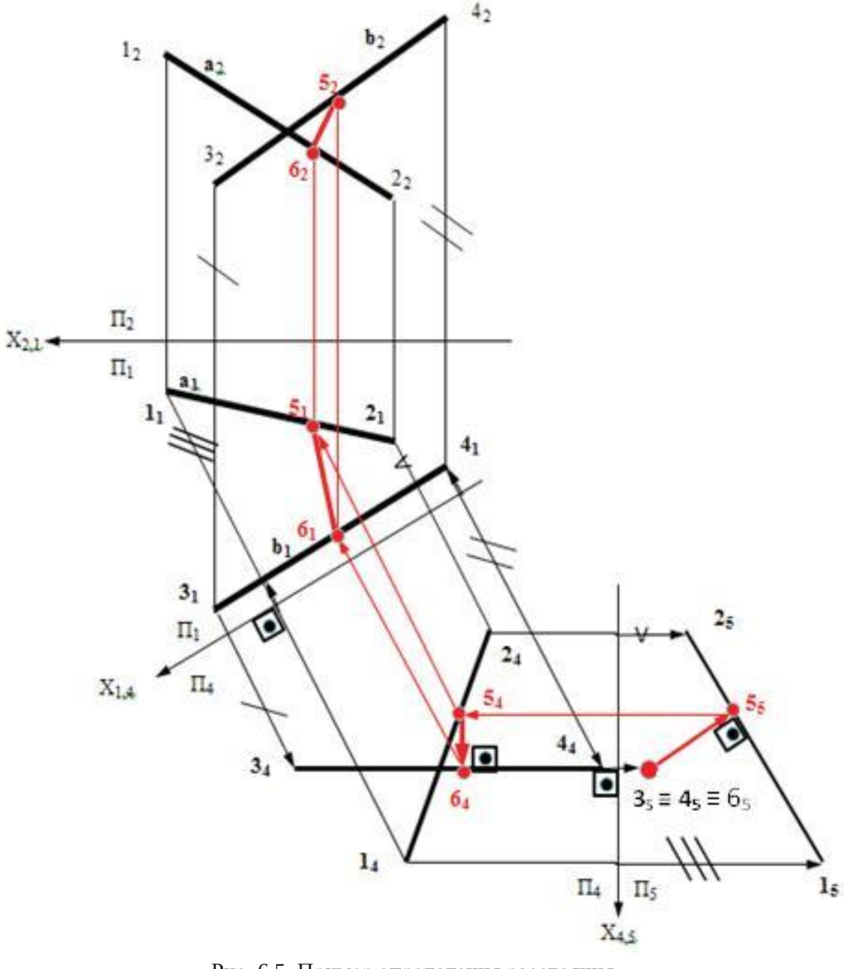



Рис. 6.5. Пример определения расстояния между скрещивающимися прямыми линиями

Для этого необходимо одну прямую (**b)** преобразовать в проецирующую прямую. Из любой точки (**$6_5$**) этой прямой опустить перпендикуляр на вторую прямую и получить точку (**$6_5$**). Перпендикуляр **$5_5 6_5$** окажется кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми. Значит искомое расстояние найдено. Для преобразования, заданной прямой **b**, нужно решить вторую задачу на преобразование подобную задаче, представленной на рис. 5.3.

## 6.3 Задачи на определение действительных величин плоских геометрических фигур и углов между ними

Общей схемой решения задач этой группы является приведение заданной плоской фигуры или плоскости угла в положение, параллельное одной из плоскостей проекций.

При выборе способа преобразования комплексного чертежа следует стремиться к простоте графических операций, их четкости и наименьшему количеству. Наиболее часто при решении задач применяются способы замены плоскостей проекций и вращения вокруг линии уровня. Способ вращения вокруг линии уровня является наиболее целесообразным для решения большинства задач данной группы, так как дает решение путем одного преобразования комплексного чертежа. К задачам данной группы можно отнести:

**Задача 1.** *Определение действительной величины плоской фигуры.*

Решение задачи представлено на рис. 5.12, 5.24, раздела 5. Задача решается аналогично задаче 1 в разделе преобразований комплексного чертежа.

**Задача 2.** *Определение угла, образованного двумя пересекающимися прямыми.*

Задачу можно решить способом замены плоскостей проекций, плоскопараллельного перемещения или способом вращения. Подобные задачи рассмотрены выше.

**Задача 3.** *Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и её прямоугольной проекцией на данную плоскость.*

Решение данной задачи сводится к перемещению плоскости общего положения, которой принадлежит угол в положение параллельное горизонтальной плоскости проекций $\pi_1$.

Наиболее эффективным способом перевода плоскости в положение параллельное плоскости проекций является вращение плоскости угла вокруг линии уровня плоскости угла, потому что в этом случае достаточно повернуть только одну точку этого угла вокруг линии уровня и построить только одну вспомогательную проекцию.

Решение задачи приведено на рис. 6.6.

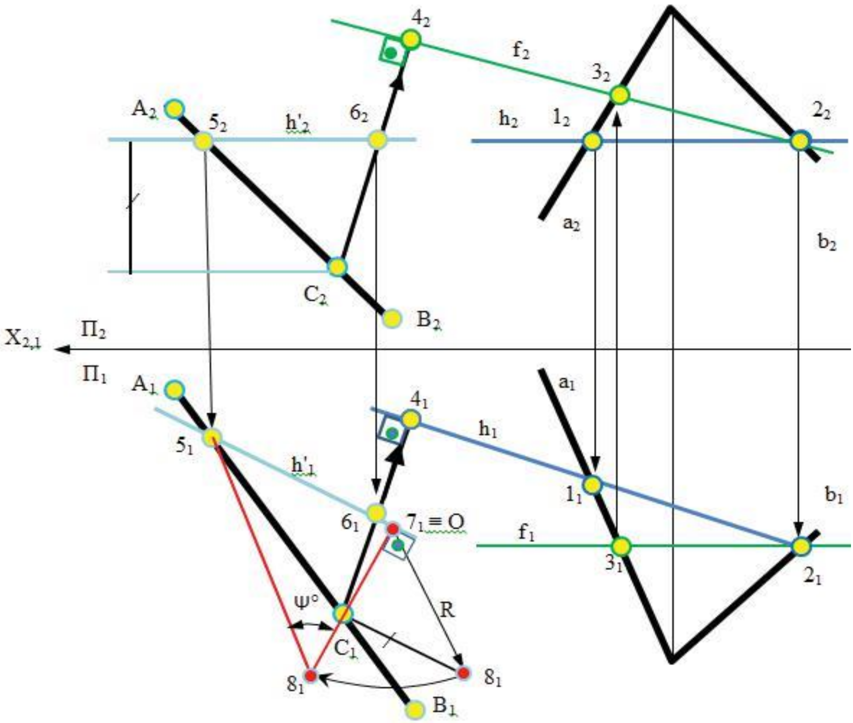



Рис. 6.6. Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью.

Для определения угла между прямой **AB** и плоскостью $\sum$ **(a ∩ b)** необходимо:

1. Определить на комплексном чертеже направление горизонтальной проекции горизонтали $\mathbf{h_1}$ и фронтальной проекции фронтали $\mathbf{f_2}$ плоскости $\sum$ **(a ∩ b)**. Для этого через произвольные точки 1 и 2 провести горизонталь h ($h_1$, $h_2$), а через точки 3 и 4 фронталь f($f_1$, $f_2$).

2. Из произвольной точки **C**, принадлежащей прямой **AB** (**C** $\subset$ **AB**) провести прямую $\mathbf{C_2 4_2} \perp \mathbf{f_2}$ и $\mathbf{C_1 4_1} \perp \mathbf{h_1}$.

3. Определить величину угла вращением его вокруг горизонтали до положения, параллельного плоскости $\mathbf{П_1}$.

4. Вычислить значение искомого угла $\boldsymbol{\varphi = 90^0 - \Psi^0}$

**Задача 4.** *Определение величины угла между двумя пересекающимися плоскостями* (рис. 6.7).

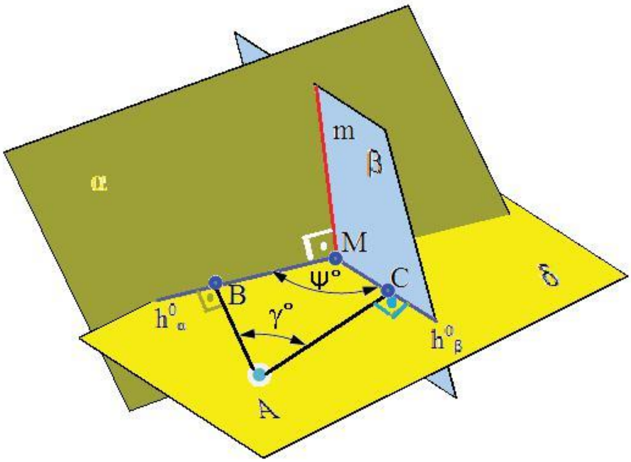



Рис. 6.7. Определение величины угла
между двумя пересекающимися плоскостями

Для определения угла **Ψ** между пересекающимися плоскостями (**α, β**) необходимо воспользоваться вспомогательной плоскостью **δ**, которую необходимо расположить перпендикулярно линии пересечения **m** заданных плоскостей. Пересечение с этой плоскостью дает возможность определить линейный угол между следами ($\mathbf{h^0_\alpha}$ , $\mathbf{h^0_\beta}$) плоскости (**δ**).

Решение задачи нужно начать с построения вспомогательной точки **A**, из которой провести перпендикулярно следам линии **AB** и **AC**. Указанные линии образуют угол **γ**. В образовавшемся четырёхугольнике **ABDC** при вершинах **B** и **C** углы прямые, следовательно между углами при вершинах **A** и **D** возникает зависимость, которую можно записать выражением:

$\angle \mathbf{\Psi = 180} - \gamma$.

Для определения на комплексном чертеже (рис. 6.8) угла **γ°** между линиями, перпендикулярными к пересекающимся плоскостям необходимо применить предложенный выше алгоритм. В данном примере предложены две плоскости. Одна, из предложенных плоскостей задана двумя параллельными прямыми, а вторая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми. Рассмотрим в примере две пересекающиеся плоскости – **α(a∩b)** и **β(c║d)**, к которым из произвольной вспомогательной точки **A** ∈ **δ** проведены к линиям уровня этих плоскостей перпендикулярные линии, принадлежащие плоскости **δ**, перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей. В результате таких построений определяется угол **γ°.** Алгоритм определения угла **γ°** представлен на рис. 6.8.

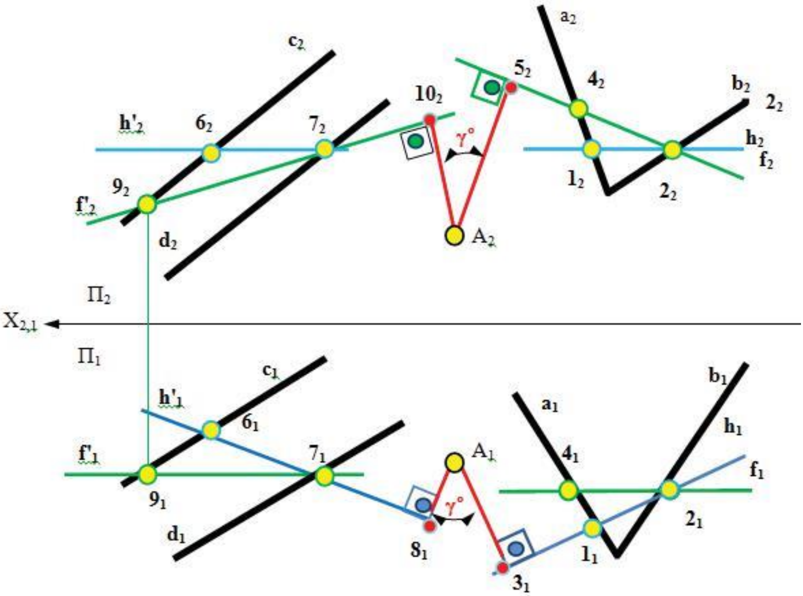



Рис. 6.8.Определение величины угла между двумя пересекающимися плоскостями на комплексном чертеже

Действительную величину угла **γ** (рис. 6.8) можно определить с помощью способа вращения точки **A** вокруг линии уровня – горизонтали или фронтали. Затем можно определить ∠ **Ψ= 180° –** ∠ **γ.**

## Вопросы для самоконтроля

*1. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы прямую общего положения преобразовать в:*

*а) прямую уровня; б)*

*проецирующую прямую.*

*2. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы плоскость общего положения преобразовать в:*

*а) проецирующую; б)*

*плоскость уровня?*

*3. Какие основные метрические задачи можно решать с помощью дополнительного проецирования?*

*4. Какие метрические задачи относят к основным?*

# 7. ПОВЕРХНОСТИ

## 7.1. Понятия и определения

В геометрии и топологии[1] поверхностью называют двумерное топологическое многообразие. Наиболее известными примерами поверхностей являются границы геометрических тел в обычном трёхмерном евклидовом пространстве.

С другой стороны, существуют поверхности (например, бутылка Клейна. Рис. 7.1), которые нельзя вложить в трёхмерное евклидово пространство без привлечения сингулярности или самопересечения.

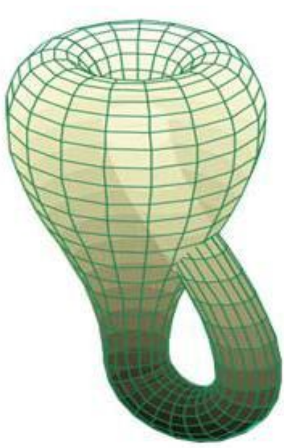


Рис.7.1. Изображение бутылки Клейна

«Двумерность» поверхности подразумевает возможность реализовать на ней метод координат, хотя и необязательно для всех точек. Так, поверхность Земли (в идеале) представляет собой двумерную сферу, широта и долгота каждой точки которой являются её координатами (за исключением полюсов и 180-го меридиана).

Концепция поверхности применяется в физике, инженерном деле, компьютерной графике и прочих областях при изучении физических объектов. Например, при анализе аэродинамических качеств самолёта, который базируется на обтекании поверхности самолёта потоком воздуха.

[1] **Тополо́гия** (от др.-греч. τόπος – место и λόγος – слово, учение) – раздел математики. **Топология** изучает: В самом общем виде – явление непрерывности; В частности – свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях.

## 7.2. Способы задания поверхностей

В математике поверхность определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют определённому виду уравнений:

$$\mathbf{F(x, y, z) = 0} \qquad (1)$$

Если функция F(x, y, z) = 0 непрерывна в некоторой точке и имеет в ней непрерывные частные производные, по крайней мере, одна из которых не обращается в нуль, то в окрестности этой точки поверхность, заданная уравнением (1), будет ***правильной поверхностью***.

Помимо указанного выше ***неявного способа задания***, поверхность может быть определена ***явно***, если одну из переменных, например, **z**, можно выразить через остальные:

$$\mathbf{z = \mathit{f}(x, y)} \qquad (2)$$

Также существует параметрический способ задания. В этом случае поверхность определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{x = x(u, v)} \\ \mathbf{y = y(u, v)}\ (3)\ \mathbf{z = z(u, v)} \end{cases}$$

## 7.3. Понятие о простой поверхности

Интуитивно простую поверхность можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям).

Более строго, простой поверхностью называется образ гомеоморфного[2] отображения (то есть взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности единичного квадрата. Этому определению можно дать аналитическое выражение. Пример простой поверхности приведён на рис. 7.2.

Пусть на плоскости с прямоугольной системой координат **u** и **v** задан квадрат, координаты внутренних точек которого удовлетворяют следующим неравенствам **0< u < 1**, **0 < v < 1**.

---

[2] **Гомеоморфи́зм** (греч. ομοιο – похожий, μορφη – форма) – взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение топологических пространств. Иными словами, это биекция, связывающая топологические структуры двух пространств, поскольку, при непрерывности биекции, образы и прообразы открытых подмножеств являются открытыми множествами, определяющими топологии соответствующих пространств.

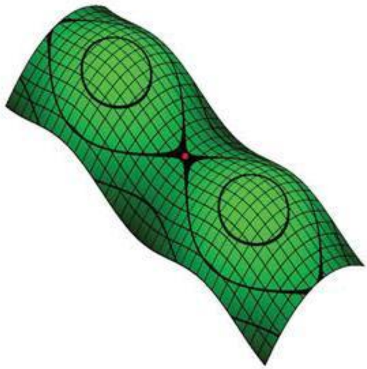


Рис. 7.2. Простая поверхность

Гомеоморфный образ квадрата в пространстве с прямоугольной системой координат **x**, **y**, **z** задаётся при помощи формул

**x = x(u, v)**, **y = y(u, v), z = z(u, v)** (параметрическое задание поверхности). При этом от функций **x(u, v)**, **y(u, v)** и **z(u, v)** требуется, чтобы они были непрерывными и чтобы для различных точек **(u, v)** и **(u', v')** были различными соответствующие точки **(x, y, z)** и **(x', y', z').**

Примером простой поверхности является полусфера. Вся же сфера не является простой поверхностью. Это вызывает необходимость дальнейшего обобщения понятия поверхности.

Подмножество пространства, у каждой точки которого есть окрестность, являющаяся простой поверхностью, называется ***правильной*** поверхностью.

Поверхности могут быть кривыми и иметь параметр кривизны. Для разных направлений в заданной точке поверхности получается разная кривизна нормального сечения, которая называется **нормальной кривизной**.

Нормальной кривизне приписывается знак плюс, если главная нормаль кривой идёт в том же направлении, что и нормаль к поверхности, или минус, если направления нормалей противоположны (рис. 7.3).

Вообще говоря, в каждой точке поверхности существуют два перпендикулярных направления $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, в которых нормальная кривизна принимает минимальное и максимальное значения; эти направления называются *главными*.

Исключение составляет случай, когда нормальная кривизна по всем направлениям одинакова (например, у сферы или на торце эллипсоида вращения), тогда все направления в точке – главные.

Нормальные кривизны в главных направлениях называются **главными кривизнами**; обозначим их $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$.

Величина: $\mathbf{K = k_1\ k_2}$ называется гауссовой кривизной[3], полной кривизной или просто кривизной поверхности.

Встречается также термин **скаляр кривизны**, который подразумевает результат свёртки тензора[4] кривизны; при этом скаляр кривизны вдвое больше, чем гауссова кривизна.

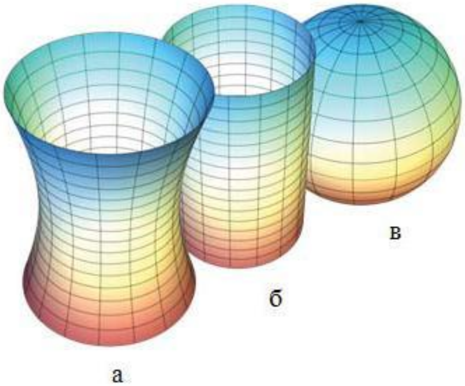



Рис.7.3. Поверхности с кривизной:
а – отрицательной; б – нулевой; в – положительной

Гауссова кривизна может быть вычислена через метрику, и поэтому она является объектом внутренней геометрии поверхностей (отметим, что главные кривизны к внутренней геометрии не относятся).

По знаку кривизны можно классифицировать точки поверхности (см. рисунок).

Кривизна плоскости равна нулю.

Кривизна сферы радиуса R всюду равна $\mathbf{K=1/R^2}$ .

Существует поверхность постоянной отрицательной кривизны – псевдосфера.

---

[3] **Гауссова кривизна** – мера искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки. Гауссова кривизна является объектом внутренней геометрии поверхностей, в частности, не изменяется при изометрических изгибаниях.

[4] **Тензор** – объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элементы другого. Частными случаями тензоров являются векторы, билинейные формы и т.п.

## 7.4. Образование поверхностей

В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно рассматривать поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.

Образование поверхности с помощью линии позволяет дать иное определение поверхности, базирующейся на таких основных элементарных геометрических понятиях, как точка и множество.

В свою очередь, линия определяется как непрерывное однопараметрическое множество точек, поэтому можно дать следующее определение поверхности:

*Поверхностью называется непрерывное двупараметрическое множество точек.*

Для получения наглядного изображения поверхности на чертеже закон перемещения линии целесообразно задавать графически в виде совокупности линий и указаний о характере перемещения линии. Эти указания могут быть заданы графически, в частности с помощью направляющей поверхности. В процессе образования поверхностей линия может оставаться неизменной или менять свою форму. Такой способ образования поверхности называется **кинематическим,** а сама поверхность – кинематической (рис.7.4, 7.5). Закон перемещения образующей линии, как правило, задается при помощи направляющих линий и алгоритма перемещения образующей по направляющим.

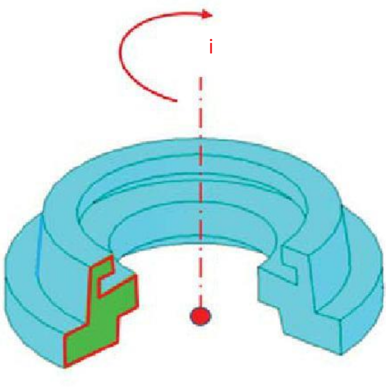



Рис. 7.4. Пример поверхности, образованной вращением линии вокруг оси i

На чертеже кинематическая кривая поверхность задается при помощи ее определителя. *Определителем поверхности называют совокупность условий, необходимых и достаточных для задания поверхности в пространстве.*

Подвижная линия называется *образующей*, неподвижные линии и поверхность – *направляющими*.

Примером такого способа образования могут служить все технологические процессы обработки металлов режущей кромкой, когда поверхность изделия несет на себе «отпечаток» профиля резца.

Режущие кромки являются неотъемлемой частью исполнительных механизмов многих строительных и дорожных машин, применяемых не только для разработки и перемещения грунта (бульдозеры, грейдеры и т. п.), но и рытье траншей, котлованов, проходка траншей, профилирование откосов и многое другое (рис. 7.5).

Рис. 7.5. Бульдозер для проходки траншей

Но режущие кромки во многих случаях начинают уступать место производящей поверхности, с которой связано развитие прогрессивных производительных процессов обработки металлов давлением и обкаткой. Геометрическая сущность этих процессов – метод огибания.

Рассмотрим некоторые кривые поверхности.

Кривые поверхности широко применяются в различных областях науки и техники при создании очертаний различных технических форм или как объекты инженерных исследований. Существуют три способа задания кривых поверхностей:

**1. Аналитический - при помощи уравнений;**

Рис. 7.6. Пример поверхности, заданной аналитически

**2. При помощи каркаса;**

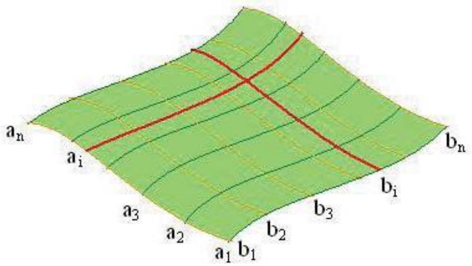



Рис. 7.7. Пример линейного каркаса поверхности

**3. Кинематический, т. е. перемещением линий в пространстве.**

Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия; она рассматривает кривую поверхность как множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению. На рис. 7.6 приведен пример поверхности, заданной аналитически (системой алгебраических уравнений).

### Каркас поверхности

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже может служить каркас поверхности.

*Каркасом поверхности принято называть упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности* (рис. 7.7).

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы называют точечными или линейными. Линей-ным каркасом называется множество таких линий, которые имеют единый закон образования и связаны между собой определенной зависимостью. Условия связи между линиями каркаса называются зависимостью каркаса. Эта зависимость характеризуется некоторой изменяющейся величиной, которая называется параметром каркаса. Если параметр линейного каркаса является непрерывной функцией, то каркас называется непрерывным, а если параметр − прерывная функция, то каркас называется дискретным. С помощью каркаса поверхности можно решать и позиционные и метрические задачи.

На рис. 7.7 приведен пример каркаса поверхности, состоящей из двух ортогонально расположенных семейств линий $\mathbf{a_1, a_2, a_3}, \ldots, \mathbf{a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots b_n}$.

**Определитель поверхности**

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если определён закон нахождения любой её точки.

Кинематический способ образования поверхности можно представить как множество положений движущейся линии или поверхности.

При этом кинематические поверхности можно разделить на четыре группы. К первой группе можно отнести поверхности, которые образуются движением образующей линии постоянного вида. Ко второй группе относят поверхности, которые образуются движением образующей линии, меняющей свой вид при движении. К третьей группе относят поверхности, которые образуются движением образующей поверхности, сохраняющей при движении свой вид и размеры. Поверхности, образующиеся при движении образующей поверхности, меняющей свой вид и размеры при движении.

Этот способ дает возможность сформулировать понятие определителя поверхности. Под этим понятием обычно подразумевают *необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и кинематических связей между ними, которые однозначно определяют поверхность*.

Определитель поверхности состоит из двух частей:

**Геометрической части – совокупности геометрических фигур, с помощью которых можно образовать поверхность.**

**Алгоритмической части – алгоритма формирования поверхности при помощи фигур, входящих в геометрическую часть определителя.**

Чтобы найти определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа образования поверхности.

Для того чтобы построить чертеж поверхности, необходимо предварительно выявить ее определитель. Определитель поверхности выявляется путем анализа способов образования поверхности или ее основных свойств. В общем случае поверхность может быть образована нескольки-ми способами и поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший.

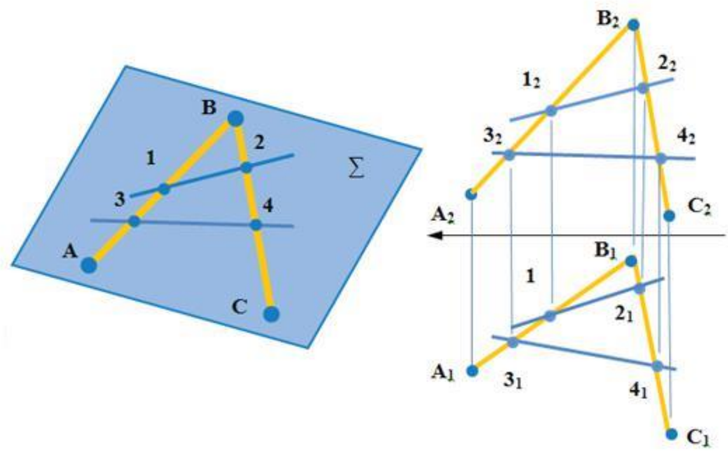
Поверхность на чертеже задают проекциями геометрической части ее определителя. Определитель кривой поверхности Ф может быть представлен в символической форме: **Ф(Г)[А]**, где **(Г)** – геометрическая часть, **[А]** – алгоритмическая часть. Для каждой поверхности обе части определителя имеют вполне конкретное содержание.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если относительно любой точки пространства, заданной на чертеже, можно однозначно решить вопрос о принадлежности ее данной поверхности. Построение проекций любых точек и линий, принадлежащих поверхности, а также второй их проекции, если одна задана, выполняется на основании ее определителя.

*Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности.*

Рассмотрим примеры выявления определителя для некоторых простейших поверхностей:

Через три точки **А, В, С,** не принадлежащие одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость ∑ (рис. 7.8, а).




а б

Рис.7.8. Примеры определителя:
а – алгоритмическая часть; б – геометрическая часть

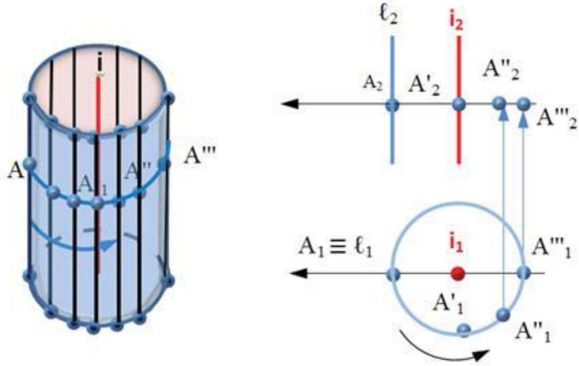
Точки **A, B** и **C** составляют геометрическую часть определителя плоскости. Вторая часть определителя, т. е. алгоритм построения в плоскости ∑ (**A, B, C**) любых линий и точек, выражается рассмотренными ранее условиями принадлежности прямой и точки плоскости.

На чертеже (рис. 7.8, б) плоскость ∑ задана проекциями геометрической части своего определителя: **$A(A_1A_2)$**, **$B(B_1B_2)$**, **$C(C_1C_2)$**.

Цилиндрическая поверхность вращения может быть образована вращением прямой **ℓ║ i** вокруг оси **i** (рис. 7.9. а).

Геометрическая часть определителя поверхности состоит из образующей линии**ℓ** и оси **i**. Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей линии **ℓ**вокруг оси **i**.

Определитель цилиндрической поверхности вращения имеет вид **Φ(ℓ ║ i, i)[A].** На чертеже (рис. 7.9. б) цилиндр вращения задан проек-циями геометрической части своего определителя.

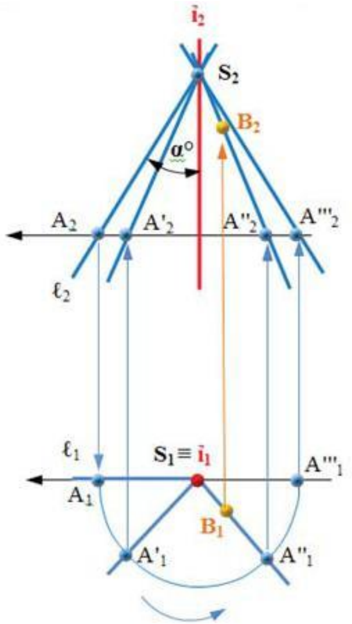



а б

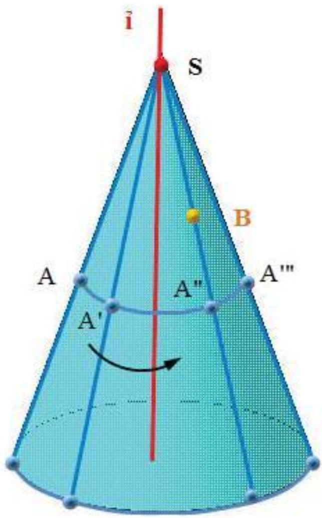
Рис. 7.9. Определитель цилиндрической поверхности:
а – поверхность образована вращением прямой ℓ║i вокруг оси i;
б – цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя

Поверхности вращения называют цилиндрической, если образующая прямая линия параллельна оси вращения и конической, если образующая прямая линия пересекается с осью вращения. В технике, строительстве, архитектуре и бытовых случаях часто используют поверхности вращения второго порядка (линейчатые и нелинейчатые). К линейчатым поверхностям вращения относятся цилиндрические, конические и однополостный гиперболоид вращения. К нелинейчатым поверхностям второго порядка относятся поверхности сферы, эллипсои-да вращения, параболоида вращения и двуполостный гиперболоид вращения.

Коническая поверхность вращения может быть образована вращением прямой**ℓ**, пересекающей ось вращения **i** под некоторым углом (рис. 7.10, а).




а




б

Рис. 7.10. Изображение определителя конической поверхности: а – алгоритмическая часть; б – геометрическая часть

Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей прямой линии **ℓ** вокруг оси **i**.

Определитель рассматриваемой конической поверхности вращения может иметь вид **Φ(ℓ ∩ i)[A]**.

На чертеже (рис. 7.10, б) конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя:**$\ell\{(\ell_1\ell_2)\ \wedge\ i(i_1i_2)\}$.** Даны фронтальные **проекции точек А и В этой поверхности. Далее построить очерковую образующую поверхности на фронтальной плоскости проекций $\Pi_2(\ell_2)$. Для этого нужно отметить точку $S_2$ и построить в ней (как в вершине)** угол $\alpha^\circ \equiv \alpha^\circ_2 = i_2 \cap \ell_2$.

Нужно помнить, что очерковые образующие могут быть построены и по-другому. Можно использовать нормальное сечение поверхности (например, окружность) или вписать сферу в коническую поверхность вращения.

В указанных примерах определитель поверхности выявляется путем анализа способов ее образования.

Рассмотрим пример выявления определителя поверхности путем анализа ее основных свойств.

Возьмем, например, сферу.

*Сферой называется поверхность, образованная множеством точек пространства, находящихся на определённом расстоянии от заданной точки* ***O.***

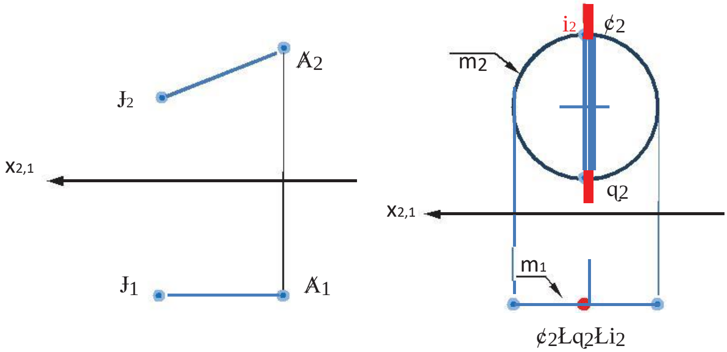
Различают две части определителя: алгоритмическую (описательную) и геометрическую. Обе части состоят из независимых условий. Например, определитель сферы имеет следующее описание: сфера – геометрическое место точек, удалённых от заданной точки (центра сферы) на равное расстояние. За это равное расстояние принимается ради-ус сферы **(R=OA)**.

За геометрическую часть принят комплексный чертёж прямой **OA**, изображенный на рис. 7.11, а. Известно, что поверхности могут быть заданы несколькими определителями. Это относится и к поверхности сферы.

В рассматриваемом случае поверхность сферы может быть получена, в отличие от первого случая, вращением окружности **m** вокруг диаметра **BC** **(**$BC \subset i$**)**, а геометрической частью могут быть комплексные чертежи окружности **m** и диаметра **BC** (рис. 7.11, б). Ось вращения **i** на рисунке проведена через диаметр **BC**.

Если поверхность имеет несколько определителей, то выбирают, обычно, тот, который удобней и проще.

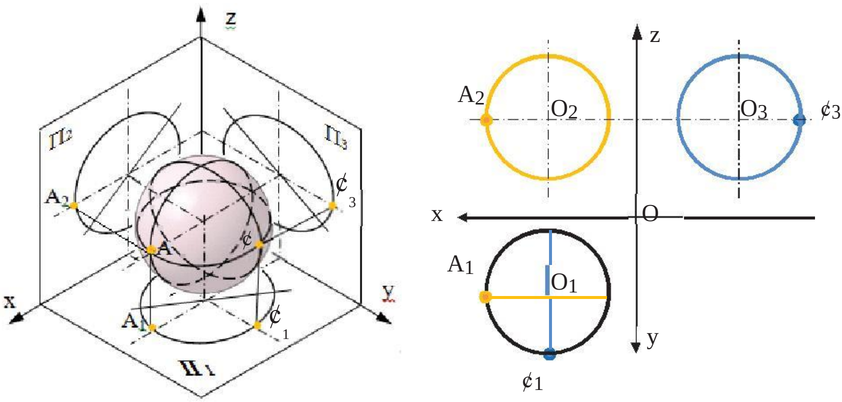
Рассмотренные выше варианты задания сферы символически можно записать в следующем виде: $\Phi = \{O;\ R = |OA|\}$ (рис.7.11, а); $\Phi = \{i;\ m\}$ (рис. 7.11, б).




а б

Рис. 7.11. Примеры определителей сферы на комплексных чертежах, заданных: а – прямой **ОА**; б – окружностью **m**

При чтении чертежа немаловажную роль играет его наглядность. Задание поверхности сферы проекциями геометрической части ее определителя не всегда может обеспечить наглядность её изображения. Поэтому для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности часто прибегают к построению проекций ее очерков. Наглядное изображение сферы с проекциями очерков на плоскостях проекций **$П_1$, $П_2$, $П_3$** представленона рис. 7.12, а.




а б

Рис. 7.12. Примеры изображения сферы с её очерками: а – наглядное изображение; б – комплексный чертёж

Сфера проецируется на любую плоскость проекций в виде окружности, диаметр которой равен диаметру сферы. Очерк сферы на **$П_1$** определяется проекцией окружности, называемой экватором сферы, на **$П_2$** определяет проекция окружности, называемая главным меридианом, а на **$П_3$** – профильным меридианом.

Пример изображения очерковых линий сферы на комплексном чертеже представлен на рис. 7.12, б.

При проецировании поверхности никакая её точка не может спроецироваться за пределами очерка. На рис. 7.12, а рассмотрены две точки **А** и **В,** принадлежащие главному и профильному меридианам сферы, а на рис.7.12, б предложен комплексный чертёж этих точек.

При построении комплексного чертежа сферы направление проецирования совпадает с направлением взгляда наблюдателя и поэтому контурная линия поверхности является линией смены видимости этой поверхности. В этом случае та часть сферы, которая расположена между глазом наблюдателя и линией контура, является видимой, а та, которая находится за линией контура, будет невидимой. Следовательно, точки, которые будут находиться на контурной линии, будут точками смены видимости.

Кривые поверхности разделяются на линейчатые и нелинейчатые, закономерные и незакономерные. Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии, которая должна проходить через определённую точку пространства (вершину) и иметь неподвижную направляющую линию в пространстве. В противном случае поверхность будет нелинейчатой.

Все линейчатые поверхности делятся на группы, в зависимости от числа направляющих, их формы и относительного положения направляющих.

Если поверхность может быть задана каким-либо уравнением, она называется закономерной, в противном случае – незакономерной, или графической (задается только чертежом).

Закономерные поверхности, в зависимости от вида уравнения, разделяются на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическое уравнение n-й степени (в декартовых координатах) задает алгебраическую поверхность n-го порядка (трансцендентные поверхности порядка не имеют). Алгебраическая поверхность n-го порядка пересекается плоскостью по кривой n-го порядка, а с прямой линией – в n точках.

Плоскость, имеющую уравнение первой степени (с произвольной плоскостью пересекается по прямой линии, ас прямой – в одной точке), можно рассматривать как поверхность первого порядка.

Примерами кривых поверхностей второго порядка могут служить поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг одной из своих осей.

Поверхности второго порядка пересекаются с произвольной плоскостью по кривым второго порядка, а с прямой – в двух точках.

Примером поверхности четвертого порядка может служить тор (см. поверхности вращения).

Определитель может быть положен в основу классификации поверхностей. К одному и тому же классу относятся поверхности, имеющие одинаковую структуру определителя.

По закону движения образующих поверхности можно разделить на:

– поверхности общего вида;

– поверхности вращения;

– винтовые поверхности;

– поверхности переноса.

По форме образующих поверхности можно разделить на:

– линейчатые (образующая – прямая линия);

– нелинейчатые (образующая – кривая линия).

Линейчатые поверхности делятся по условиям движения – с одной направляющей, с двумя направляющими и направляющей поверхностью и с тремя направляющими.

Нелинейчатые поверхности можно разделить на поверхности с образующей постоянного и переменного видов.

Наибольшее применение в технике получили кинематические кривые поверхности с образующими постоянной формы.

## 7.5. Линейчатые поверхности с одной направляющей

Как уже отмечалось, поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии. Поверхность, которая не может быть образована движением прямой линии, называется нелинейчатой. Например, конус вращения – линейчатая поверхность, а сфера – нелинейчатая. Через любую точку линейчатой поверхности можно провести, по крайней мере, одну прямую, целиком принадлежащую поверхности. Множество таких прямых представляет собой непрерывный каркас линейчатой поверхности.

Линейчатые поверхности можно разделить на два вида:

**1) развертывающиеся поверхности;**

**2) неразвертывающиеся, или косые поверхности.**

**Примечание.** Все нелинейчатые поверхности являются неразвертывающимися. Рассмотрим несколько наиболее характерных разновидностей тех и других.

Линейчатые поверхности с одной криволинейной направляющей называются торсами, а криволинейная направляющая**m** таких поверхностей – ребром возврата (рис. 7.13).

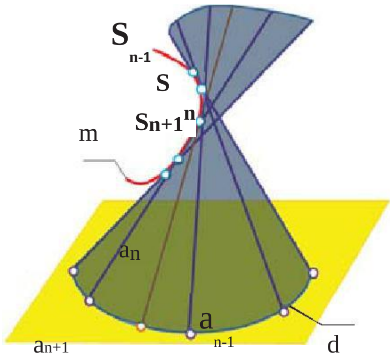



Рис. 7.13. Поверхность с ребром возврата

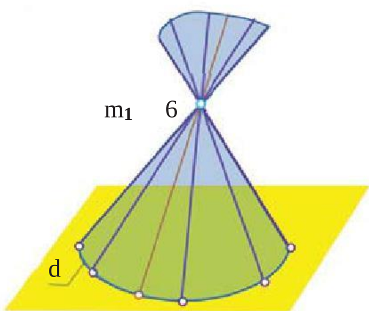



Рис. 7.14. Коническая поверхность

Торсы можно без складок и разрывов совместить с плоскостью. Такие поверхности называют развёртывающимися.

Если ребро возврата вырождается в точку (если точка собственная), то получится частный вид торса – коническая поверхность (рис. 7.14).

Если ребро возврата вырождается в несобственную точку, то получится цилиндрическая поверхность (рис.7.15).

В частном случае торсовые поверхности можно преобразовать в плоскость. Для этого необходимо выполнить условие: ребро возврата **m** должно быть преобразовано в плоскую кривую, а направляющие **d**конической и цилиндрической поверхностей – в прямую линию.

*Поверхность называется развертывающейся, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов*. Очевидно, что все гранные поверхности являются развертывающимися. Из кривых поверхностей этим свойством обладают только те линейчатые поверхности, которые имеют ребро возврата.

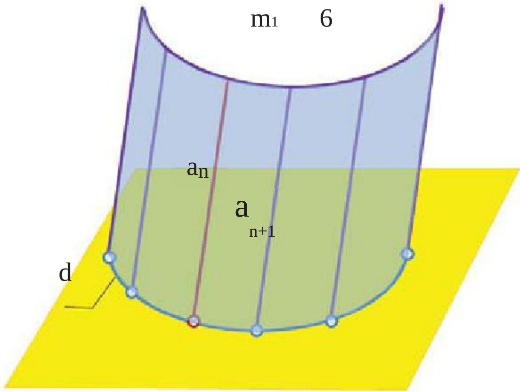



Рис 7.15. Цилиндрическая поверхность

Существует только три вида линейчатых поверхностей, имеющих ребро возврата: торсы, конические и цилиндрические (рис. 7.13 – 7.15) .

Необходимо отметить, что у всех развертывающихся линейчатых поверхностей, две смежные образующие либо пересекаются (торс, коническая поверхность), либо параллельны (цилиндрическая поверхность).

## 7.6. Комплексный чертёж поверхности и еёобразующие

Рассмотрим пример (рис. 7.16) комплексного чертежа конусной поверхности **Ф** с определителем, включающим направляющую линию **d** и вершину **S**: **Ф** = {$\mathbf{S_1, S_2; d_1, d_2}$} на котором, контурными образующими линиями поверхности являются **AS, BS, CS, DS.**

Для определения положений очерковых линий поверхности необходимо воспользоваться горизонтально проецирующими плоскостями
Σ и **Σ'**, которые касаются направляющей $\mathbf{d_1}$ в точках $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_1}$ и вершины

$\mathbf{S_1}$. При проецировании этой поверхности на фронтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\pi_2}$ видимыми оказываются все её образующие, пересекающие направляющую **d** в пределах линии **ADB,** а невидимыми на $\boldsymbol{\pi_2}$ будут все образующие, которые расположены в пределах линии **ACB.**

При проецировании, рассматриваемой поверхности, на$\boldsymbol{\pi_1}$ видимыми будут те образующие, которые пересекают направляющую **d**на участке **CAD.** Это те образующие, которые окажутся при построении выше контурных линий **SC**и**SD**.

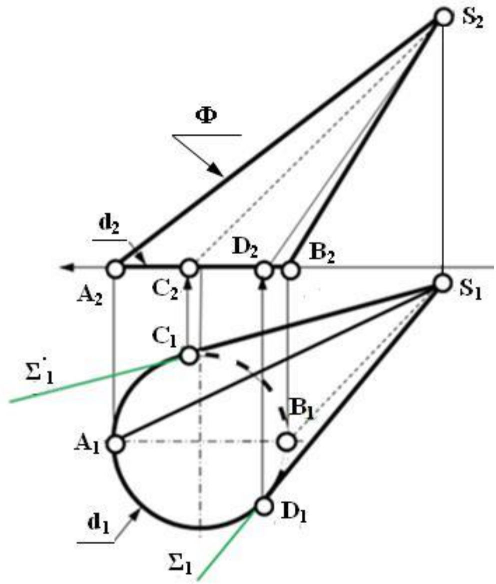



Рис. 7.16. Пример комплексного чертежа конической поверхности

Аналогично могут быть построены комплексные чертежи и цилиндрических и гранных поверхностей. У гранных поверхностей при их изображении на чертежах необходимо показывать все рёбра. Очерковыми образующими у гранных поверхностей являются соответствующие проекции их рёбер.

## 7.7. Неразвертывающиеся (косые) линейчатые поверхности

Линейчатой поверхностью называется поверхность, образованная при перемещении прямой линии в пространстве по какому-либо закону. Характер движения прямолинейной образующей определяет вид линейчатой поверхности. Обычно закон движения образующей задаётся с помощью направляющих линий. В общем случае для задания линейчатой поверхности необходимы три направляющие линии , которые могут однозначно задать закон перемещения направляющей. Выделим на линейчатой поверхности три какие-нибудь линии **a, b** и **c** и примем их за направляющие (рис. 7.17).

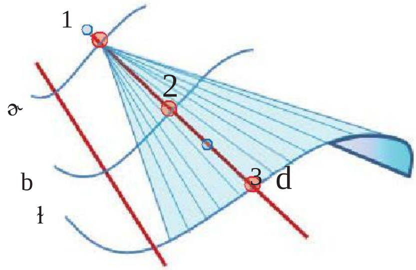
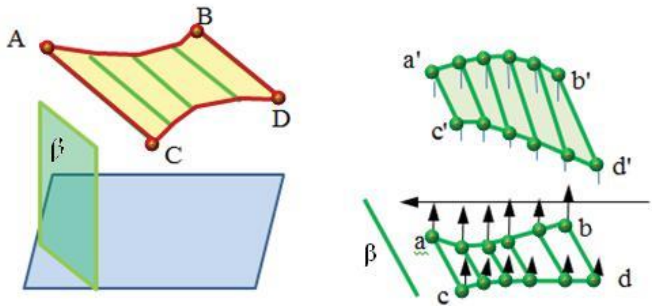



Рис. 7.17. Линейчатая поверхность в общем случае

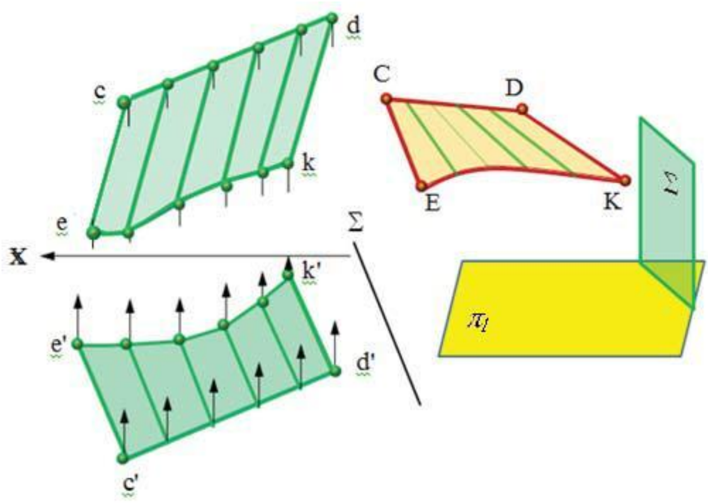
Изучение группы *линейчатых неразвертывающихся поверхностей* можно начать с цилиндроидов – поверхностей с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана), поверхностей, образуемых движением прямой, скользящей по *двум кривым направляющим*, не лежащим в одной плоскости, и остающейся все время параллельной, так называемой, плоскости *параллелизма* (рис.7.18).




а б Рис. 7.18. Пример цилиндроида: а – в пространстве; б – на комплексном чертеже

Следующей поверхностью в этой группе является *коноид,* который представляет собой линейчатую неразвертывающуюся поверхность, которая образуется движением прямой, скользящей по двум направляющим, не лежащим в одной плоскости, и остающейся все время параллельной, так называемой, плоскости *параллелизма*.

Приэтом нужно знать, что одна из этих направляющих является прямой линией (рис. 7.19).




а б

Рис. 7.19. Пример коноида: а – на комплексном чертеже; б – в пространстве

Если же обе направляющие цилиндроида заменить прямыми линиями (скрещивающимися), то образуется линейчатая неразвертывающая-ся поверхность с плоскостью параллелизма – *косая плоскость, или линейчатый параболоид, или гиперболический параболоид* (рис. 7.20).

Своё название (гиперболический параболоид) линейчатая поверхность получила из-за того, что при пересечении ее соответствующими плоскостями в сечении можно получить параболы и гиперболы

Разновидностями косых поверхностей являются линейчатые поверхности с направляющей плоскостью и частные их виды – линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана).

В первом случае (рис. 7.20, а) поверхность однозначно задается двумя направляющими прямолинейными скрещивающимися линиями **d**, **n** и направляющей плоскостью γ, которая заменяет третью направляющую линию. Образующая прямая скользит по двум направляющим и всё время остаётся параллельной плоскости параллелизма γ.

Если плоскости параллелизма перпендикулярны друг другу $\gamma \perp \pi_1$ , то гиперболический параболоид называется прямым.

На рис. 7.20, б изображён комплексный чертёж косой плоскости. По своему виду эта поверхность напоминает седло.

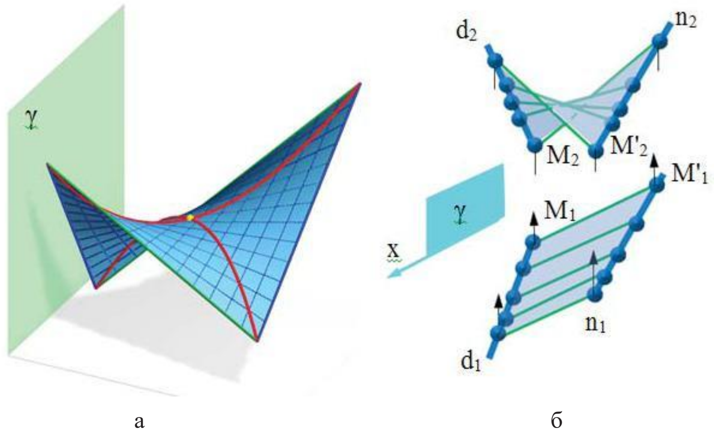



Рис. 7.20. Параболоид гиперболический:
а – в пространстве; б – на комплексном чертеже

Поверхности с направляющей плоскостью называются косыми цилиндроидами, если обе направляющие являются кривыми линиями; косыми коноидами – если одна из направляющих – прямая линия; дважды косой плоскостью, если направляющие – скрещивающиеся прямые.

Дважды косой цилиндроид, как линейчатая поверхность с тремя направляющими, из которых две пространственные кривые и одна прямая показан на рис. 7.21.

На рис. 7.22. показан дважды косой коноид, образованный перемещением образующей прямой (красная) по трем направляющим, из которых две прямые. Показано построение одной образующей, как результата пересечения вспомогательной плоскости, проходящей через одну из прямолинейных направляющих, с двумя другими направляющими.

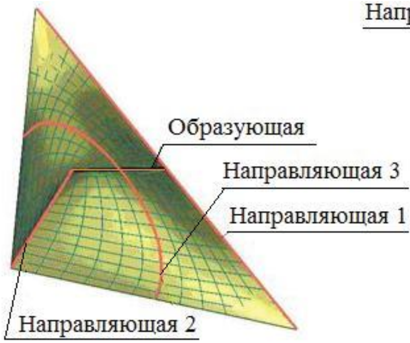



Рис. 7.21. Дважды косой цилиндроид

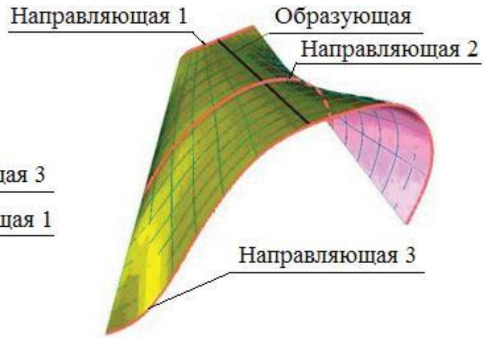



Рис. 7.22. Дважды косой коноид

## 7.8. Винтовые поверхности

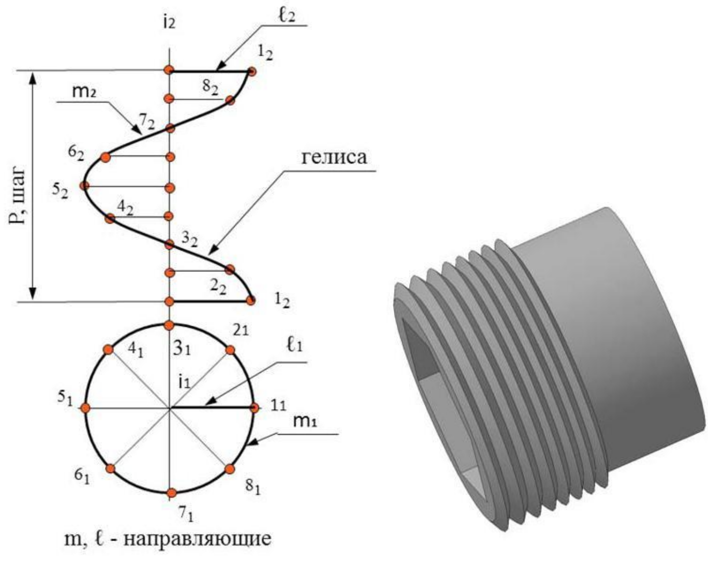
Большую группу линейчатых неразвертывающихся поверхностей составляют *винтовые поверхности (гелисоиды или геликоиды)*, имеющие широкое применение в технике.

*Винтовые поверхности – это такие поверхности, у которых хотя бы одна направляющая – винтовая линия.* В технике часто встречаются винтовые поверхности (рис. 7.23), образованные при винтовом движении прямой.

Такие поверхности образуются при движении произвольной образующей по винтовой направляющей. Если образующая – прямая линия, то образованные поверхности называются **геликоидами**.

В зависимости от величины угла наклона образующей к оси геликоиды бывают **прямыми**, если угол равен 90°, и **наклонными (косыми),** если угол – произвольный, отличный от 0 и 90°. **Прямой** геликоид образуется движением **прямолинейной образующей** і по двум направляющим: винтовой линии *m* и ее оси і; при этом образующая $\ell$ пересекает винтовую ось под прямым углом.

На рис. 7.23.а прямая линия іявляется осью винтовой линии или поверхности. Расстояние от точки $1_1$ до оси і называется радиусом винтовой линии. Для построения винтовой линии в горизонтальной плоскости проекций один оборот разделился на 8 равных частей. В этих ча-стях отмечены цифрами проекции положений точки. Высота подъёма разделена также на 8 частей. При повороте точки в горизонтальной плоскости проекций из положения $1_1$ в положение $2_1$ во фронтальной плоскости проекций точка из положения $1_2$ переместится в положение $2_2$ и так для каждого положения двигающейся точки. Соединяясь, все фиксированные положения точки образуют её фронтальную проекцию траектории движения.




а б

Рис. 7.23. Пример построения (а) и использования (б) прямого геликоида

Горизонтальная проекция движения – *окружность*. Траектория движения называется *винтовой линией*. Винтовая линия постоянного радиу-са называется *гелисой*. Величина подъёма винтовой линии за один оборот – её *шаг*. Если винтовую линию и ось i считать направляющими, а горизонтальную плоскость проекций за направляющую плоскость, то при движении прямолинейной образующей образуется винтовая поверхность, называемая прямым винтовым коноидом или геликоидом.

Геликоид, у которого образующая не перпендикулярна оси винтовой поверхности, называется наклонным или архимедовым.

Следует отметить одно важное свойство винтовых поверхностей, состоящее в том, что эти поверхности, так же как и поверхности вращения, могут сдвигаться, т. е., совершая винтовое перемещение, поверхность скользит вдоль самой себя. Это свойство обеспечивает винтовым поверхностям широкое применение в технике. Винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, рабочие органы судовых движителей, конструкции винтовых аппарелей и лестниц – вот далеко не полный перечень технического использования винтовых поверхностей. Кроме указанных в предложенном перечне, винтовые поверхности нашли широкое применение в строительстве и архитектуре.

## Вопросы для самоконтроля

*1. Как рассматриваются поверхности в начертательной геометрии?*

*2. Приведите краткую классификацию поверхностей, приняв за критерии классификации:*

*а) вид образующей; б) характер*

*перемещения образующей.*

*3. В чем сущность образования поверхностей кинематическим способом?*

*4. Что называется каркасом поверхности?*

*5. Чем отличается непрерывный каркас от дискретного?*

*6. Что является содержанием геометрической и алгоритмической частей определителя?*

*7. Как задается поверхность на эпюре Монжа?*

*8. Какие поверхности называются поверхностями Каталана?*

*9. Какие виды линейчатых поверхностей существуют?*

*10. Что такое очерк поверхности?*

*11. Как образуются поверхности вращения?*

*12. Укажите основные свойства поверхности вращения.*

*13. Как образуются винтовые поверхности?*

*14. По какому признаку поверхности геликоида подразделяют на закрытые и открытые?*

*15. Сформулировать признак принадлежности точки поверхности*

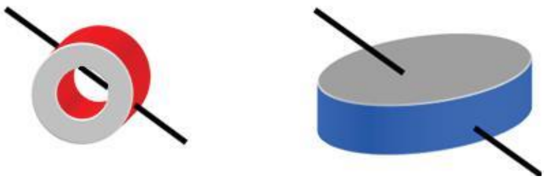
*16. Привести примеры использования различных поверхностей в технике, науке, искусстве и других видах деятельности человека.*

# 8. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОВЕРХНОСТИ

## 8.1. Взаимное положение прямой и поверхности. Пересечение поверхности прямой линией

Одной из позиционных задач является определение взаимного положения прямой и поверхности.

Прямая может принадлежать поверхности и в этом случае все точки этой прямой принадлежат поверхности, а в другом случае прямая может пересекать поверхность и иметь точки входа и выхода (рис. 8.1).



а б

Рис. 8.1. Примеры пересечения прямой линией поверхностей: а – втулки; б – диска

Для определения этих точек на комплексном чертеже можно использовать плоскости – посредники и использовать метод вспомогательных секущих плоскостей, сущность которого заключается в том, что через прямую **ℓ** проводится вспомогательная плоскость ∑ и на линии**m** пересечения этой плоскости с поверхностью **λ** находятся и точки входа и выхода **A** и **B** (рис. 8.2), принадлежащие прямой и поверхности.

Чтобы получить рациональное решение, следует использовать наиболее простой способ получения линии пересечения m. В качестве линии пересечения желательно получить либо прямую линию, либо окружность.

Рассмотрим некоторые примеры пересечения прямой линии с поверхностями.

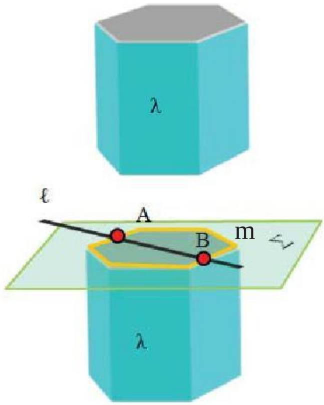



Рис. 8.2. Пример определения точек входа прямой ℓ в поверхность λ и выхода из неё

**Задача 1.** *Найти точки входа и выхода прямой ℓ при её пересечении поверхности пирамиды SABC* (рис. 8.3).

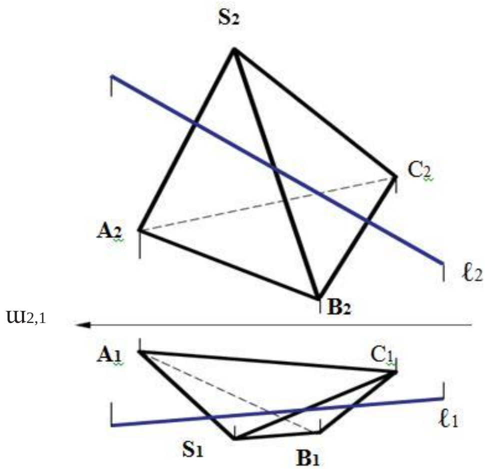



Рис. 8.3. Графическое условие задачи на определение точек пересечения поверхности пирамиды прямой линией

Для решения предложенной задачи (рис. 8.3), нужно поступить так же, как при нахождении точки пересечения прямой с плоскостью (рис. 3.9): через фронтальную (горизонтальную) проекцию прямой $\ell_2$ провести вспомогательную проецирующую плоскость $\sum$, определить во фрон-тальной (горизонтальной) плоскости проекций точки пересечения вспо-могательной плоскости с поверхностью пирамиды $1_2 2_2 3_2 4_2$. Затем, по принадлежности, найти горизонтальную (фронтальную) проекцию ли-нии пересечения $1_1 2_1 3_1 4_1$ плоскости с поверхностью (рис. 8.4.а).

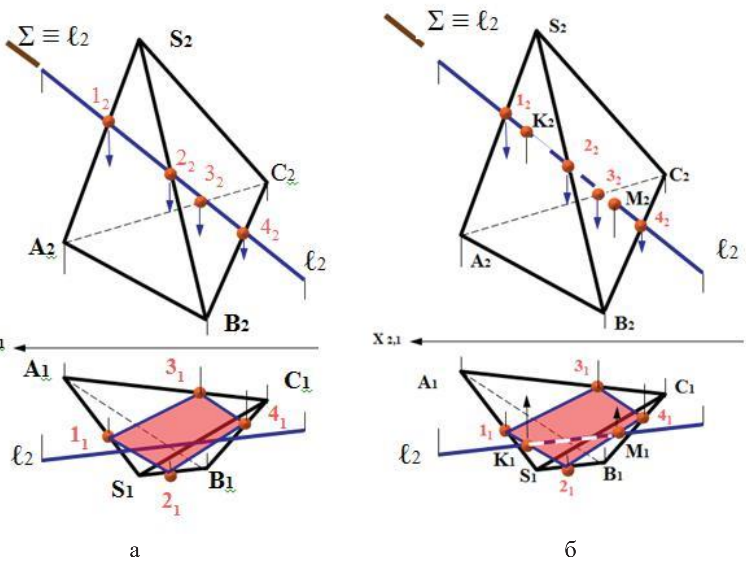



Рис.8.4. Пример определения:
а – проекции линии пересечения поверхности плоскостью; б – точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности пирамиды

Для определения точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности (рис. 8.4. б) необходимо в горизонтальной плоскости проекций найти горизонтальные проекции точек пересечения (**$K_1$** и **$M_1$**) горизонтальной проекции прямой $\ell_1$ с горизонтальной проекцией линии пересечения поверхности с плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1$. Затем по принадлежности определить фронтальные проекции (**$K_2$** и **$M_2$**)точек входа и выхода. Часть линии, находящейся в поверхности будет невидимой.

**Задача 2.** *Найти точки входа и выхода прямой АВ при её пересечении поверхности конуса* (рис. 8.5).

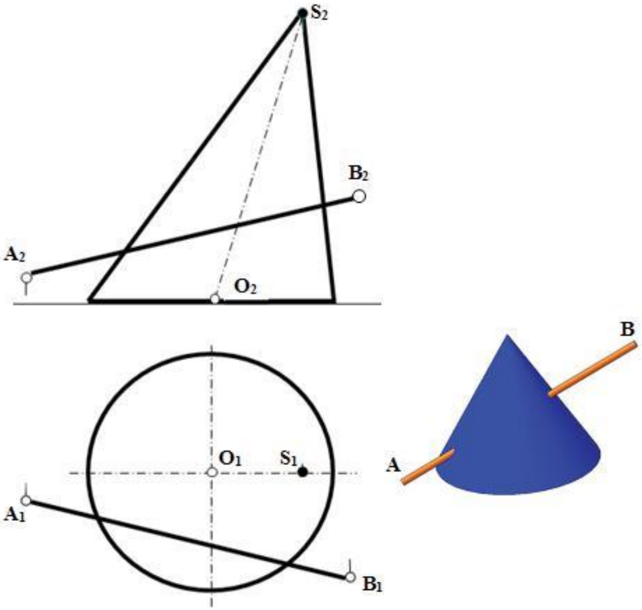



Рис. 8.5. Графическое условие задачи на определение точек входа и выхода при пересечении поверхности конуса прямой линией

Для решения задачи нужно:

1) Во фронтальной плоскости проекций через прямую **АВ** и вершину конуса **S** провести вспомогательную произвольную плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми (**SA, SB**);

2) найти горизонтальный след $h^0$ этой плоскости, для чего нужно построить два горизонтальных следа **H** и **H'** прямых **SA** и **SB** вспомогательной плоскости (рис. 8.6).

3) Определить линию сечения поверхности вспомогательной плоскостью.

Горизонтальный след плоскости $\mathbf{h^0}$, пересекая основание поверхности конуса в точках $1_1$ и $2_1$, укажет границы проекции линии сечения ($S1_1$ $2_1$) поверхности вспомогательной плоскостью.

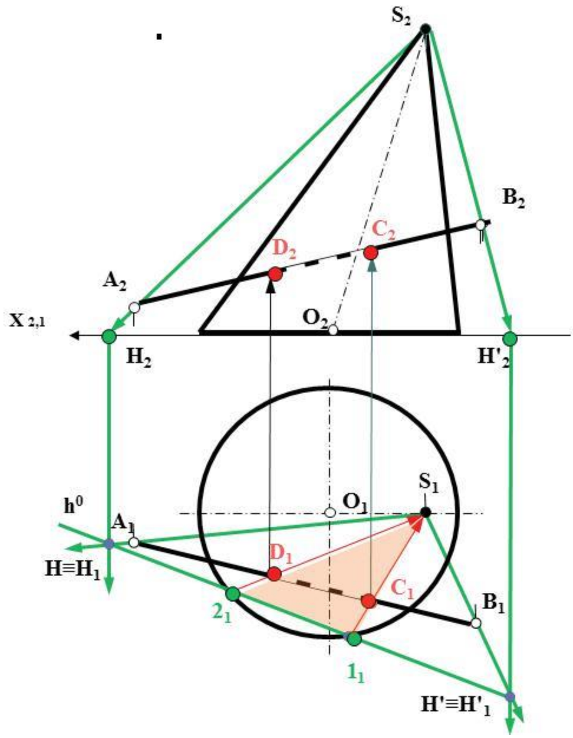



Рис. 8.6. Пример определения точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности конуса

4) Найти горизонтальные проекции точек входа и выхода.

Для определения точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности конуса необходимо отметить горизонтальные проекции точек пересечения $C_1$ и $D_1$ горизонтальной проекции линии сечения поверхности конуса $\mathbf{S1_1\ 2_1}$ с горизонтальной проекцией заданной прямой $A_1B_1$.

5) Определить фронтальные проекции точек входа и выхода.

Фронтальные проекции $C_2D_2$ точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности конуса определяются по принадлежности. В соответствии с расположением прямой относительно поверхности определяется видимость элементов прямой.

**Задача 3.** *Построить точки пересечения цилиндрической поверхности с прямой* (рис. 8.7).

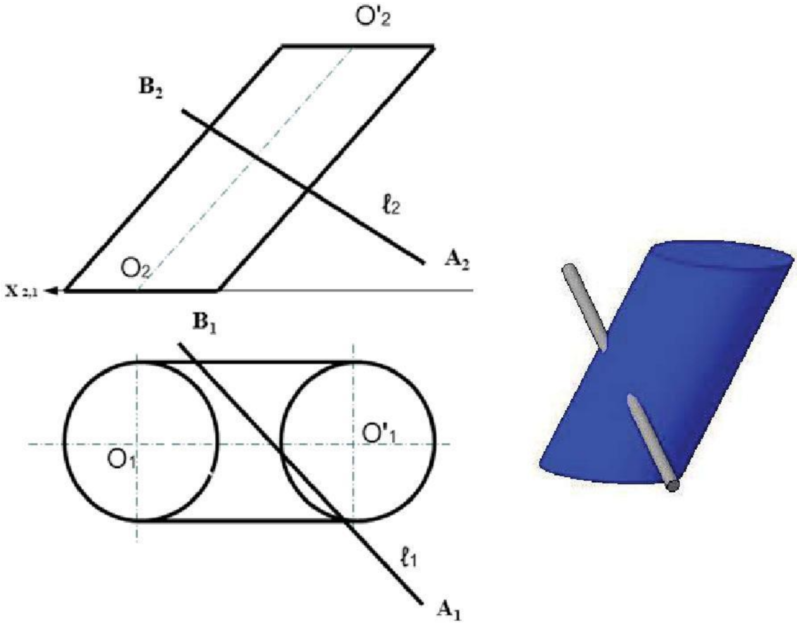



Рис. 8.7. Графическое условие задачи на пересечение поверхности цилиндра прямой линией

Для решения задачи нужно:

1) Во фронтальной плоскости проекций через прямую **AB** провести произвольную вспомогательную плоскость, заданную двумя прямыми, параллельными образующим цилиндра;

2) Найти горизонтальный след $\mathbf{h^0}$ этой плоскости, для чего нужно построить два горизонтальных следа **H** и **H'** параллельных прямых вспомогательной плоскости (рис. 8.8).

3) Определить проекции линии сечения.

Горизонтальный след плоскости $\mathbf{h^0}$, пересекая основание поверхности конуса в точках $1_1$ и $2_1$, укажет границы проекции линии сечения ($1_1 1'_1 2_1 2'_1$) поверхности цилиндра вспомогательной плоскостью.

4) Найти горизонтальные проекции точек входа и выхода.

Для определения проекций точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности цилиндра необходимо отметить горизонтальные проекции точек пересечения $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{N_1}$ горизонтальной проекции линии сечения поверхности цилиндра $\mathbf{1_1 1'_1 2_1 2'_1}$ с горизонтальной проекцией заданной прямой $\mathbf{A_1B_1}$.

5) Найти фронтальные проекции точек входа и выхода.

Фронтальные проекции $\mathbf{N_2M_2}$ точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности цилиндра определяются по принадлежности. В соответствии с расположением прямой относительно поверхности и плоскостей проекций необходимо определить видимость элементов прямой. В рассматриваемом случае фронтальная проекция точки $\mathbf{N_2}$ оказывается видимой, а проекция точки $\mathbf{M_2}$ – невидимой. Полное решение задачи представлено на рис. 8.8.

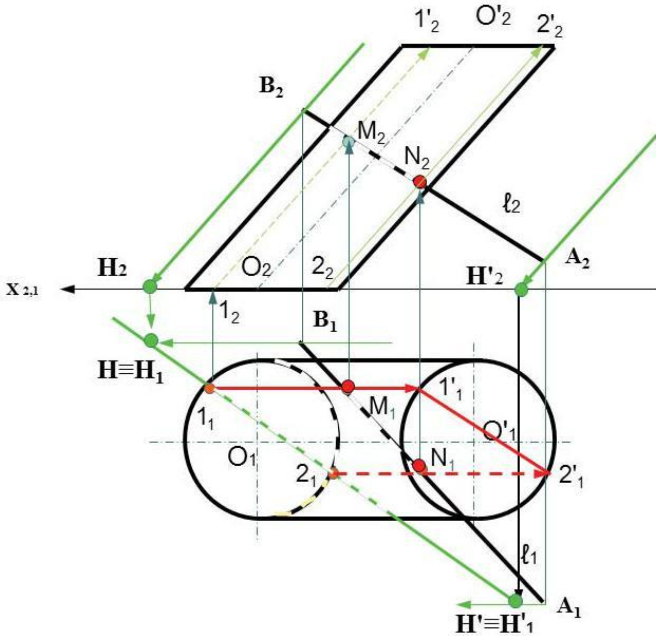



Рис. 8.8. Пример определения точек входа и выхода прямой при пересечении поверхности цилиндра

**Задача 4.** *Построить точки пересечения сферической поверхности с прямой* (рис. 8.9).

Для решения такой задачи можно использовать способ замены плоскостей проекций. Через $\mathbf{A_1B_1}$ провести вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость, которая позволит найти линию пересечения поверхность сферы.

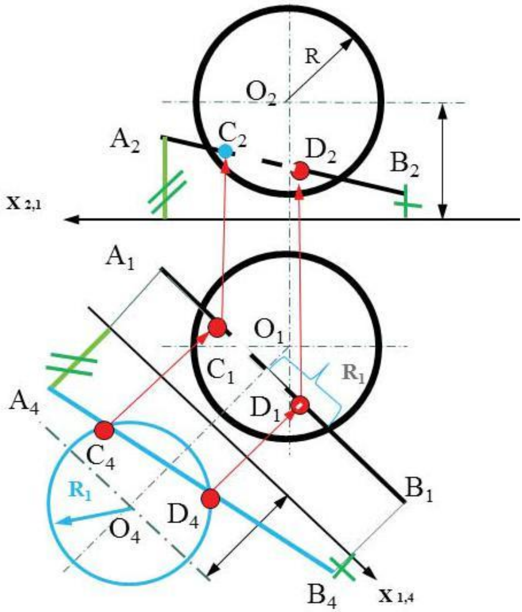



Рис. 8.9. Пример определения точек пересечения прямой с поверхностью сферы на комплексном чертеже

Линия пересечения пройдёт по окружности радиуса $\mathbf{R_1}$. Натуральную величину линии сечения можно получить на плоскости проекций $\mathbf{П_4}$, параллельной вспомогательной плоскости сечения. Проекции точек входа и выхода прямой $\mathbf{C_4D_4}$ в поверхности сферы окажутся на пересечении проекций линии сечения и прямой $\mathbf{A_4B_4}$. По принадлежности находятся горизонтальные и фронтальные проекции точек **C** и **D**. Затем определяется видимость элементов прямой.

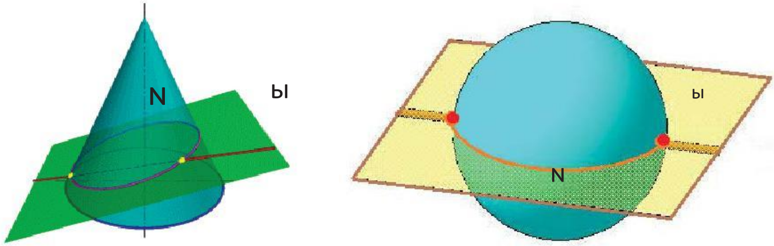



Рис. 8.10. Примеры пересечения кривых поверхностей с прямыми линиями:
а – конуса; б – сферы

## 8.2. Пересечение поверхностей плоскостью

Определение взаимного положения плоскости и поверхности – задача позиционная, для решения которой применяется метод вспомогательных секущих плоскостей. В качестве вспомогательных секущих плоскостей используются проецирующие плоскости – плоскости перпендикулярные плоскостям проекций, поэтому основу метода вспомогательных секущих плоскостей составляет алгоритм решения задачи по нахождению проекций линии пересечения поверхности с проецирующей плоскостью.

Для определения проекций линии сечения следует найти проекции точек, принадлежащих этой линии.

В этом случае нужно выполнить анализ положений поверхности и плоскости относительно плоскостей проекций. Если секущая плоскость – общего положения, то необходимо её привести в проецирующее положение. Затем необходимо представить какого вида линия должна получиться в сечении и определить:

1) проекции опорных точек – точек расположенных на очерковых образующих поверхности (эти точки определяют границы видимости проекции кривой);

2) проекции экстремальных точек, удаленных на минимальные и максимальные расстояния от плоскостей проекций;

3) проекции произвольных (промежуточных) точек линии сечения.

В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций, сложность решения позиционной задачи, по определению линии пересечения ее с поверхностью существенно меняется. Наиболее простым представляется случай, когда плоскость проецирующая, а поверхность гранная. Решение подобной задачи рассмотрено на рис. 8.4.

Алгоритм решения таких задач однотипный. Рассмотрим задачи по определению линий сечения некоторых поверхностей.

**Задача 1**. *Определить проекции линии сечения поверхности трёхгранной призмы с фронтально-проецирующей плоскостью* $\lambda$ (рис. 8.11).

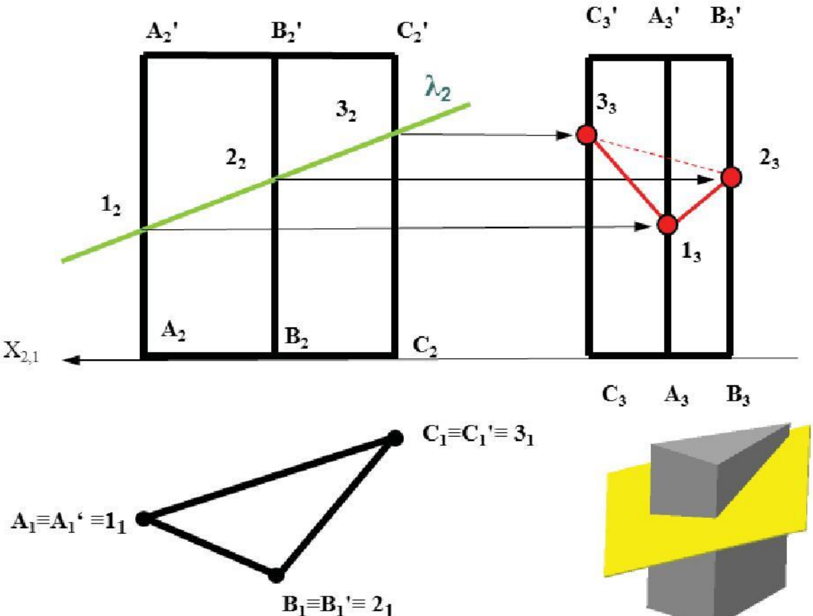



Рис. 8.11. Пример определения натуральной величины линии сечения гранной поверхности проецирующей плоскостью

**Многогранником** называется пространственная фигура, ограниченная замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников. Стороны многоугольников образуют **рёбра,** а плоскости многоугольников – **грани** многогранника. Поэтому задачу по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью можно свести к многократному решению задачи по нахождению: а) линии пересечения двух плоскостей (граней многогранника и секущей плоскости); б) точки встречи прямой (рёбер многогранника) с секущей плоскостью.

Если происходит пересечение многогранника, то в сечении должна получиться ломаная замкнутая кривая. В рассматриваемой задаче использован вариант а. Рассмотрим второй вариант.

**Задача 2.** *Определить линию сечения пирамиды* (рис. 8.12) *плоскостью способом рёбер.*

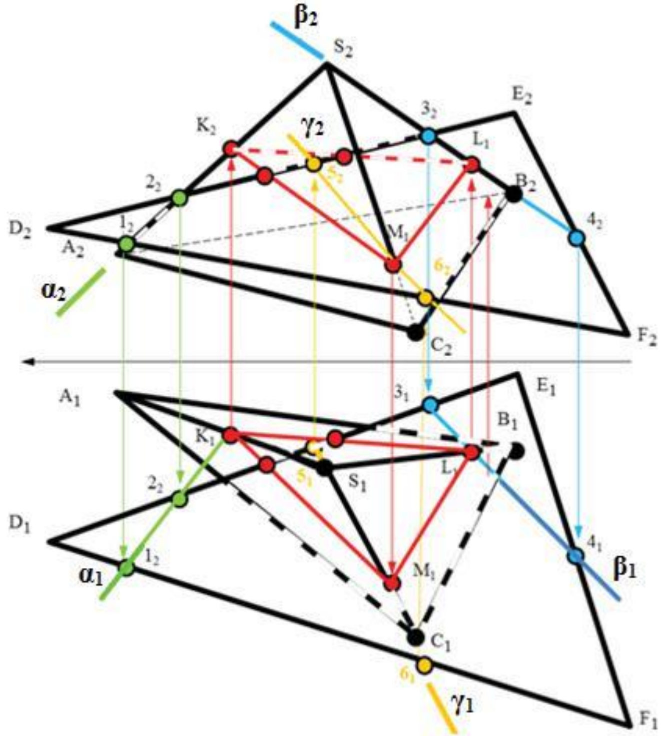



Рис. 8.12. Пример определения линии пересечения пирамиды с плоскостью

Для определения линии пересечения использованы вспомогательные проецирующие плоскости. Во фронтальной плоскости проекций через фронтальную проекцию ребра $S_2A_2$ проводится вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость $\alpha$, которая пересечёт фронтальные проекции сторон плоскости $D_2E_2F_2$ в точках $1_2$ $2_2$. По принадлежности определяются горизонтальные проекции $1_12_1$ этих точек и горизонтальная проекция точки $K_1$ пересечения этой плоскости с ребром пирамиды $S_2A_2$. Фронтальная проекция $K_2$ находится по принадлежности ребру $S_2A_2$. Аналогичными построениями находятся проекции точек **L** и **M**. Точка **L** находится с помощью плоскости $\beta$. Точка **M** находится с помощью вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости $\gamma$.

Особое место занимают задачи по нахождению линии пересечения плоскости с конической поверхностью. В зависимости от положения секущей плоскости линией пересечения может быть окружность, эллипс, парабола, гипербола (рис. 8.13).

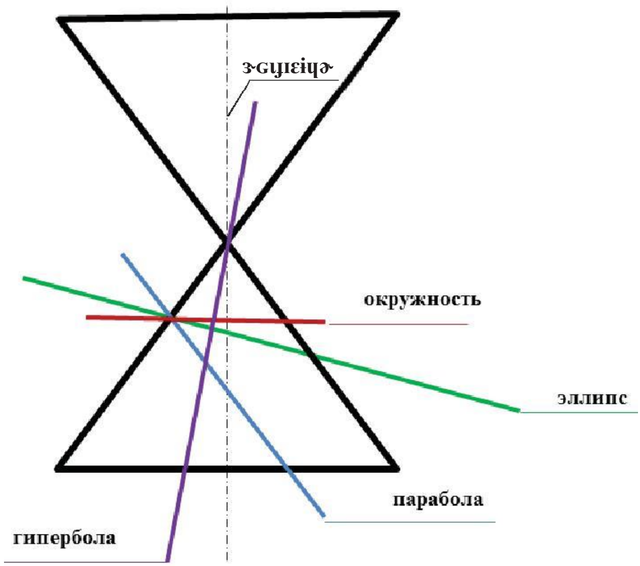



Рис. 8.13. Возможные линии сечения поверхности конуса плоскостью

Рассмотрим примеры пересечения поверхности конуса фронтально-проецирующими плоскостями.

**Задача 3.** *Найти линию сечения поверхности конуса фронтально-проецирующей плоскостью* (рис. 8.14).

Во фронтальной плоскости проекций фронтально-проецирующая плоскость λ, при пересечении обеих образующих поверхности конуса, даёт в сечении плоскую линию эллипса (рис. 8.14).

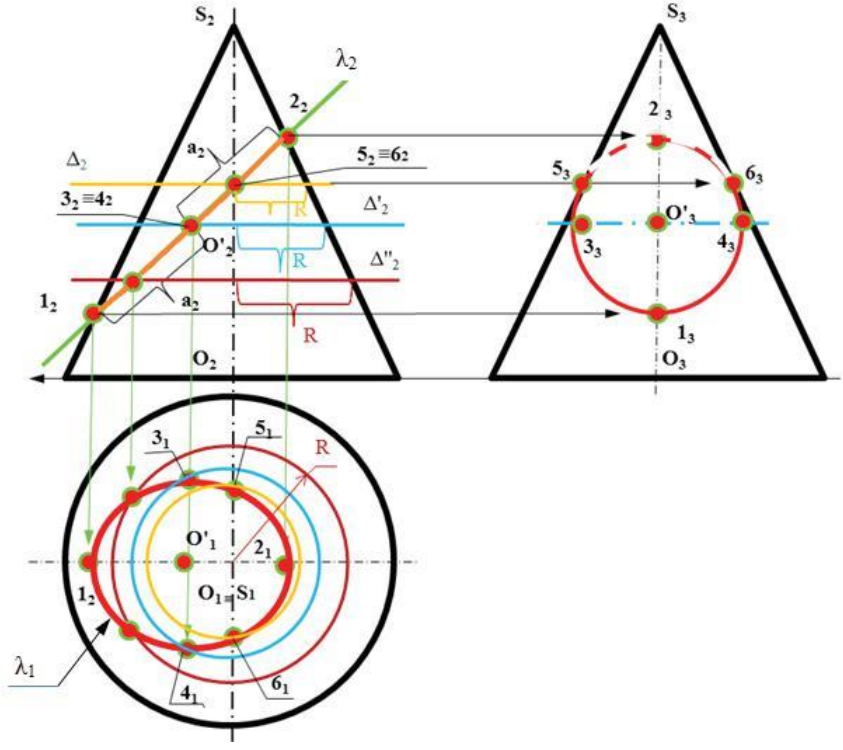
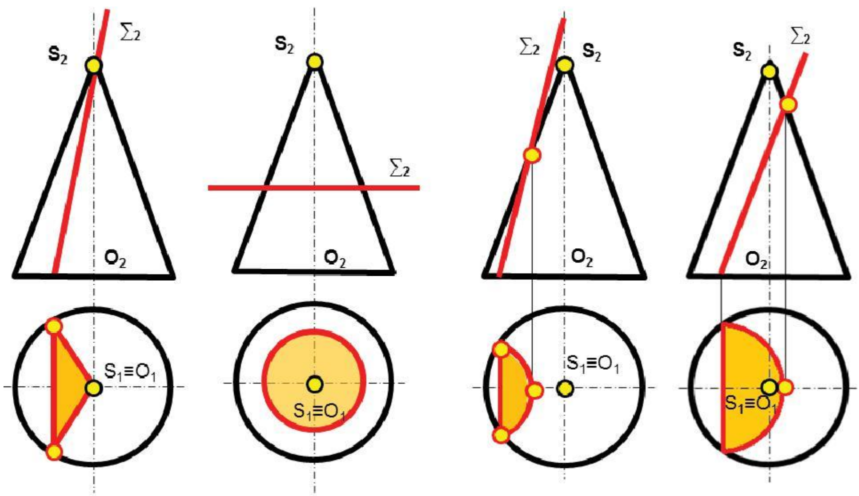


Рис. 8.14. Пример пересечения поверхности конуса фронтально-проецирующей плоскостью

Для определения проекций этой линии сечения необходимо найти опорные точки, к которым относятся очерковые $1_2$ и $2_2$ (самая низкая и самая высокая), которые расположены на образующих конусной поверхности и представляют собой одну из проекций осей эллипса. В горизонтальной плоскости проекций проекции этих точек $1_1$ и $2_1$ расположены на осевой линии конуса. Вторая ось эллипса находится на середине оси $\mathbf{1_2\ 2_2}$ в точке $\mathbf{O'_2}$($\mathbf{1_2O'_2 = O'_2 2_2 = a}$). Эта ось определяет вторую пару опорных точек.

Одна из этих точек ($\mathbf{4_1}$) является самой близкой. А вторая ($\mathbf{3_1}$) – самой далёкой. Величина второй оси эллипса определяется с помощью вспомогательной плоскости уровня $'_2$, в сечении которой находится окружность радиуса **R**. Величина диаметра этой окружности $\mathbf{3_1 4_1}$ и представляет величину второй оси этого эллипса. Последовательное соединение проекций, полученных точек, даёт возможность для определения проекций линии сечения поверхности плоскостью. Для определения добавочных (промежуточных) точек для построения линии сечения можно воспользоваться добавочными вспомогательными плоскостями. На рисунке 8.14. построения выделены цветными линиями.

При построении третьей проекции линии сечения нужно учесть, что проекции точек для построения определяются по принадлежности, а профильные проекции точек ($\mathbf{5_3\ 6_3}$) являются точками смены видимо-сти для проекции линии сечения в профильной плоскости проекций.




а б в г

Рис. 8.15. Примеры возможных линий сечений поверхности конуса: а – треугольник; б – окружность; в – гипербола; г – парабола

Рассмотрим пример сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и другие варианты сечений поверхности конуса.

При сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, в сечении получится фигура треугольника (рис. 8.15 а).

В сечении конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса получится фигура окружности (рис. 8.15 б).

Если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса и не проходит через его вершину, то в сечении получатся линии: эллипса (рис. 8.15 б), параболы (рис.8.15 г) и гиперболы (рис. 8.15 в).

Если плоскость $\sum$ параллельна одной образующей поверхности конуса, то линией пересечения является ***парабола*** **(**рис.8.15 г**)**. В частном случае (плоскость касательная к поверхности конуса) сечение вырождается в***прямую***.

Если плоскость $\sum$ параллельна двум образующим поверхности конуса (в частном случае параллельна оси конуса), то линия сечения будет ***гиперболой***. В случае прохождения плоскости через вершину конической поверхности фигурой сечения могут быть сами образующие, т.е. гипербола вырождается в ***две пересекающие прямые***.

**Задача 4.** *Найти линию сечения поверхности сферы фронтально-проецирующей плоскостью* (рис. 8.16).

Окружность, по которой плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ пересекает сферу, проецируется на плоскости $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_3}$ в виде эллипса, а на плоскость $\mathbf{П_2}$ в прямую линию, ограниченную очерком сферы.

Охарактеризуем выбранные для построения точки:

**1, 2** – две вершины эллипса, определяющие положение малой оси на горизонтальной и профильной проекциях, их фронтальные проекции определяют пересечение следа плоскости $\sum$ с очерком сферы. Эти точки являются соответственно высшей и низшей точками сечения.

**3, 4** – фронтальные проекции этих точек лежат на горизонтальной оси сферы, т.е. принадлежат экватору сферы, их горизонтальные проекции лежат на очерке сферы и определяют зону видимости при построении эллипса на $П_1$.

**5, 6** – фронтальные проекции этих точек лежат на вертикальной оси сферы, а профильные проекции лежат на очерке сферы и определяют зону видимости при построении эллипса на $П_3$.

**7, 8 –** две вершины эллипса, определяющие положение его большой оси на горизонтальной и профильной проекциях.

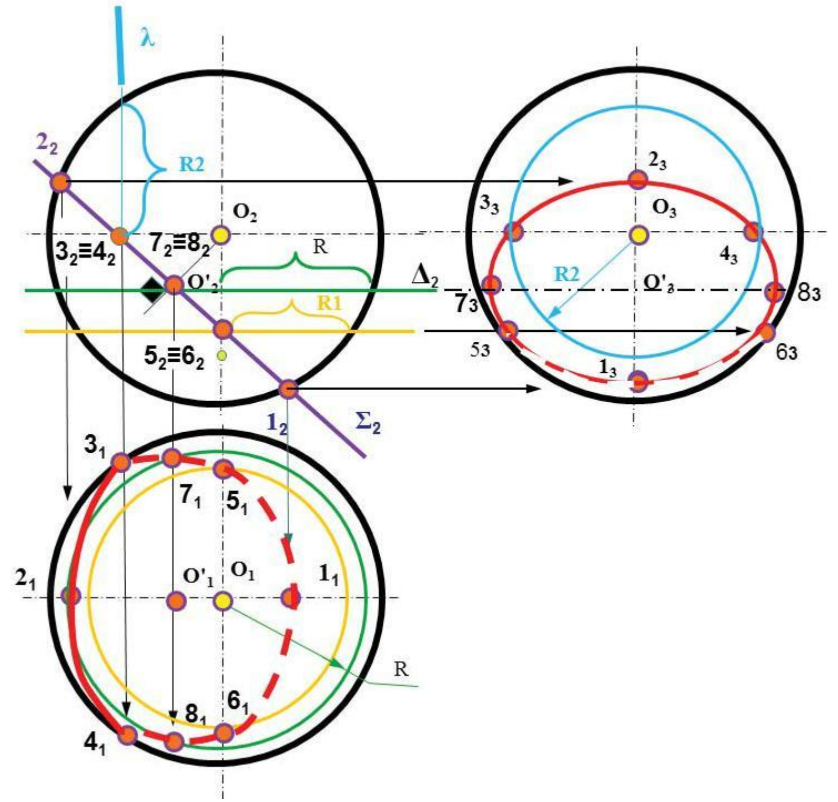



Рис. 8.16. Изображение пересечения поверхности сферы проецирующей плоскостью

Положение их фронтальных проекций определяет перпендикуляр, опущенный из центра сферы к следу плоскости ∑.

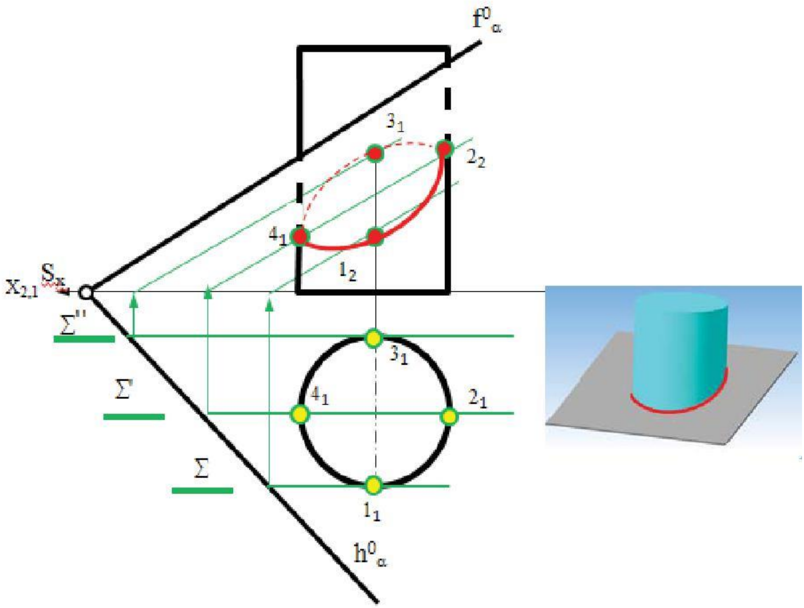
Линия пересечения плоскости ∑ и сферы на фронтальной плоско-сти проекций совпадает со следом плоскости ∑, и на ней находятся точ-ки $\mathbf{1_2}$ и $\mathbf{2_2}$. Горизонтальные проекции этих точек $\mathbf{1_1}$ и $\mathbf{2_1}$определяются с помощью линий связи на горизонтальной оси сферы в горизонтальной плоскости проекций.

Для определения промежуточных точек линии сечения, в общем случае, можно использовать вспомогательные секущие плоскости ( – горизонтальные плоскости уровня).

Например, через точки $5_2$, $6_2$, можно провести след плоскости $_2$ , на горизонтальной плоскости проекций линией пересечения вспомогательной плоскости сферы будет окружность радиуса **R1**. Горизонтальные проекции этих точек будут лежать на пересечении линии связи с полученной линией сечения. Для определения других промежуточных точек нужно выполнять аналогичные построения с использованием вспомогательных плоскостей (см. точки $7_1$ и $8_1$). Для определения точек $3_3$и $4_3$ удобно использовать вспомогательную плоскость λ**.** Эти проекции точек будут находиться на пересечении проекции линии сечения (окружность радиуса **R2**) слиниями связи. Так могут находиться все проекции точек линии сечения.

**Задача 5.** *Найти линию сечения поверхности цилиндра плоскостью, заданной следами* (рис. 8.17).

Задача решается с помощью вспомогательных плоскостей ∑, проведённых через опорные точки поверхности цилиндра.

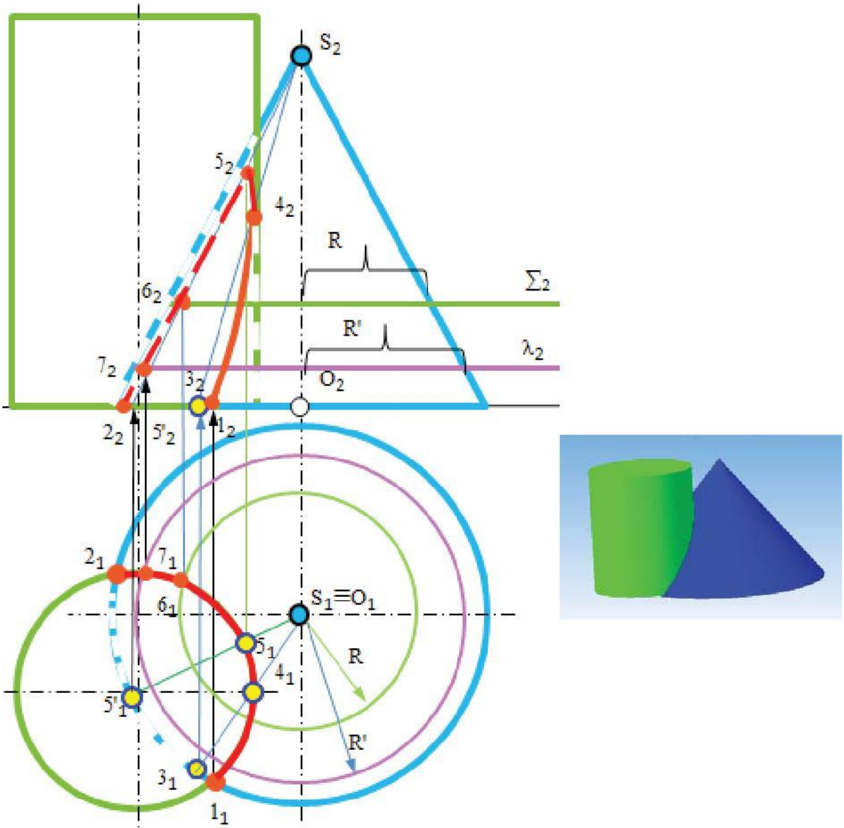



а б

Рис. 8.17. Пример определения линии сечения цилиндра плоскостью:
а – алгоритм определения; б – пример возможного результата определения

## 8.3. Взаимные пересечения поверхностей

Построение линии пересечения поверхностей осуществляется при помощи вспомогательных секущих плоскостей, которые, пересекая поверхности, дают возможность определить точки линии пересечения поверхностей, которые, в рассматриваемом случае, принадлежат одной и той же вспомогательной плоскости и пересекающимся поверхностям (рис. 8.18).




а б

Рис. 8.18. Пример построения линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра с помощью вспомогательных секущих плоскостей:
а – алгоритм построения; б – пример возможного результата построения

При построении линии пересечения наиболее характерны два случая:

- одна из проекций линии пересечения известна и задача сводится к отысканию недостающих проекций точек по принадлежности одной из поверхностей;
- проекции линии пересечения не известны.

И в том и другом случае задача решается введением дополнительных секущих поверхностей, позволяющих находить точки, принадлежащие одновременно нескольким геометрическим объектам. В каче-стве дополнительных поверхностей могут использоваться плоскости, цилиндры и сферы, дающие наиболее простые (заранее известные) линии при пересечении с заданными поверхностями.

Если в качестве вспомогательных секущих поверхностей используются плоскости, то способ построения называют ***способом вспомогательных плоскостей***.

Если используются сферы − ***способом вспомогательных сфер***.

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения цилиндра с конусом вращения (рис. 8.18).

Для построения линии пересечения заданных поверхностей удобно в качестве вспомогательных поверхностей использовать серию горизонтальных плоскостей, перпендикулярных оси конуса, которые пересекают цилиндр и конус по окружностям. На пересечении этих окружностей находят точки искомой линии пересечения.

Известно , что если ось поверхности вращения проходит через центр сферы и сфера пересекает эту поверхность, то линия пересечения сферы и поверхности вращения − окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения. При этом, если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии. Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер. При этом могут быть использованы концентрические и эксцентрические сферы. Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер − сфер с постоянным центром (рис. 8.19).

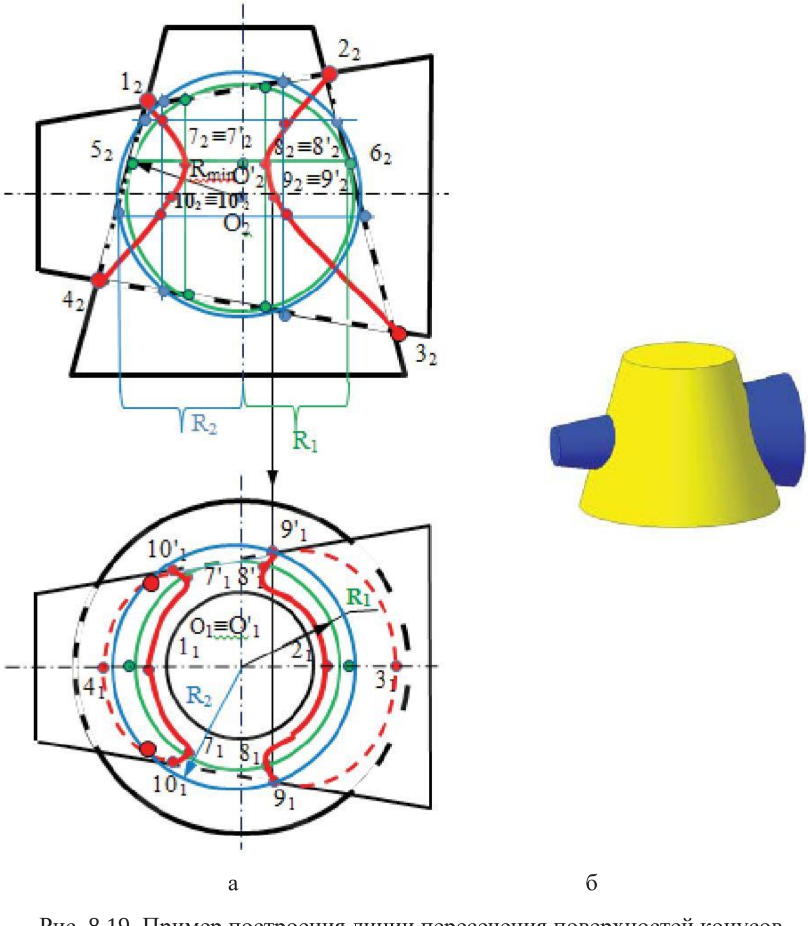
Способ секущих сфер с постоянным центром для построения линии пересечения двух поверхностей применяют при следующих условиях:

- обе линии пересекающиеся поверхности − поверхности вращения;
- оси поверхностей вращения пересекаются;

- точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;

- плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна плоскости проекций.

В случае, если это условие не соблюдается, то, чтобы его обеспечить, прибегают к способам преобразования чертежа.




а б

Рис. 8.19. Пример построения линии пересечения поверхностей конусов с помощью концентрических сфер:
а) алгоритм построения; б) пример возможного результата построения

Такие сферы применяют, если:

- одна из пересекающихся поверхностей – поверхность вращения, другая поверхность имеет круговые сечения;

- две поверхности имеют общую плоскость симметрии (т. е. ось поверхности вращения и центры круговых сечений второй поверхности принадлежат одной плоскости – плоскости их симметрии).

Плоскость симметрии параллельна плоскости проекций (это условие при необходимости может быть обеспечено преобразованием чертежа). В этом случае окружности, по которым вспомогательные сферы пересекают поверхности, будут проецироваться на плоскость проекций в виде отрезков прямых. Для правильного использования метода вспомогательных секущих концентрических сфер рассмотрим задачу о пересечении двух конусов, оси которых пересекаются и параллельны $\mathbf{П_2}$.

В таком случае центром концентрических сфер, которые будут обеспечивать дополнительные построения, необходимые для решения задачи, принимается точка пересечения осей конусов.

Для решения задачи можно воспользоваться помощью вспомогательных сфер. Каждая из вспомогательных сфер может иметь по две пары отрезков параллельных основаниям конусов (за исключением применения минимального радиуса). Пересечение отрезков, принадлежащих разным конусам, даёт точки, принадлежащие линии пересече-ния поверхностей. Рассмотрим задачу, приведённую на рис. 8.19.

Фронтальные проекции $\mathbf{1_2, 2_2, 3_2, 4_2}$ точек находятся на пересечении фронтальных проекций очерков конусов. Их горизонтальные проекции $\mathbf{1_1, 2_1, 3_1, 4_1}$ находятся на горизонтальных проекциях осей конусов. Так как **точки 3, 4** находятся на нижней очерковой линии, горизонтально расположенного конуса, их горизонтальные проекции – невидимые, а точки **1** и **2** – видимые. Для нахождения промежуточных точек линии пересечения поверхностей можно использовать концентрические сферы. Пересечение осей конусов даёт точку центра $\mathbf{O_2}$ концентрических сфер. Если из центра $\mathbf{O_2}$провести радиусом $\mathbf{R_{min}}$ сферу, то в сечении конуса образуется окружность $\mathbf{R_1}$ (зеленого цвета).

На этой окружности образуются две пары промежуточных конкурирующих точек линии сечения **7 – 7’** и **8 – 8’**, горизонтальные проекции которых находятся в проекционной связи с их фронтальными. Ещё две пары точек, искомой линии сечения, получаются аналогично рассмотрен-ным (**7 – 7’** и **8 – 8’**) при использовании ещё одной концентрической сфе-ры (синего цвета). В рассматриваемом примере линия пересечения конусов на фронтальной плоскости проекций **$П_2$** распалась на две видимые части относительно вертикальной осевой линии (**$1_2 7_2 4_2$**, и **$2_2 8_2 3_2$**), а на горизонтальной плоскости проекций **$П_1$** эти части видны частично.

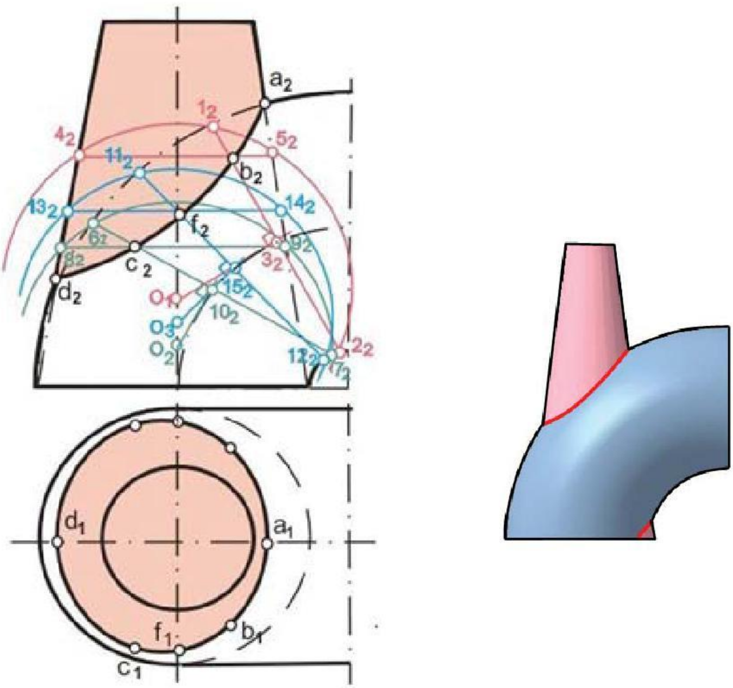
Точками смены видимости линии пересечения являются точки **9** и **10**, которые находятся на образующих горизонтального конуса. На фронтальной плоскости проекции этих точек **$9_2$ – $9'_2$**и **$10_2$ – $10'_2$** расположены на оси. Горизонтальные проекции этих точек расположены на образующих горизонтально расположенного конуса и являются точка-ми смены видимости на горизонтальной проекции линии пересечения двух рассматриваемых конусов.

Рассмотрим построение линии пересечения прямого кругового конуса и тора, оси которых скрещиваются с помощью эксцентрических сфер (рис. 8.20).

Ось конуса параллельна плоскости **$П_2$**, ось тора перпендикулярна плоскости **$П_2$**, окружность центров осевых круговых сечений тора и ось конуса лежат в одной плоскости, параллельной плоскости **$П_2$**. Две очевидные характерные точки: высшая с проекцией **$a_2$** и низшая **$d_2$** – являются точками пересечения проекций очерков тора и конуса. Для построения проекций промежуточных точек, например проекции **$b_2$**, выполняют следующие построения: выбирают на поверхности тора окружность, например с проекцией **$1_2$ $2_2$** с центром в точке с проекцией **$3_2$**.

Перпендикуляр к плоскости этой окружности из точки с проекци-ей **$3_2$** является линией центров множества сфер, которые пересекают тор по окружности с проекцией **$1_2$ $2_2$**. Из множества этих сфер выбира-ют сферу с центром на оси конуса. Его проекция **$O_1$**. Эта сфера радиу-сом **$R_1$** пересекает конус по окружности с проекцией **$4_2$ $5_2$**. Пересече-ние проекций **$1_2$ $2_2$ и $4_2$ $5_2$** является проекцией пары общих точек тора и конуса , т.е. линии их пересечения. На чертеже обозначена проекция **$b_2$** одной из указанных точек – точки на видимом участке линии пересечения.

Построение проекций второй пары точек линии пересечения, из которых обозначена проекция **$c_2$**, выполнено с помощью отрезка **$6_2$ $7_2$** − проекции окружности на поверхности тора. Вспомогательная сфера для построения проекции $c_2$ − сфера радиусом **$R_2$** с центром, проекция которого **$O_2$**. Конус эта сфера пересекает по окружности с проекцией **$8_2$ $9_2$**. В пересечении проекций **$6_2$ $7_2$** и **$8_2$ $9_2$** окружностей находим проекцию **$c_2$** искомой точки и симметричной ей на невидимой части пересекающих-ся поверхностей.




а б

Рис. 8.20. Пример построения линии пересечения поверхностей конуса и тора с помощью эксцентрических сфер:
а) алгоритм построения; б) пример возможного результата построения

## Вопросы для самоконтроля

*1) От каких параметров поверхности и плоскости зависит форма линии пересечения поверхности с плоскостью?*

*2) Каков алгоритм (порядок) определения линии пересечения поверхности плоскостью?*

*3) Какое положение плоскости пересечения по отношению к поверхности является предпочтительным для определения линии пересечения?*

*4) Какой способ построения линии пересечения называется способом вспомогательных сфер?*

*5) В каком случае при определении линии пересечения применяются концентрические (эксцентрические) сферы?*

*6) Какой способ построения линии пересечения необходимо применить, если две поверхности имеют общую плоскость симметрии?*

*7) Приведите пример определения линии пересечения поверхностей* с *помощью эксцентрических сфер.*

# 9. РАЗВЁРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## 9.1. Основные понятия и свойства

Поверхность называется развертывающейся, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. При этом нужно исходить из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Построение разверток поверхностей представляет собой большое практическое значение при конструировании различных изделий для производства и, особенно часто, для изготовления конструкций, выполненных из листового материала способом изгибания . Из листового материала изготавливают, не только развертывающиеся поверхности, но и неразвертывающиеся поверхности . Неразвертывающуюся поверхность, в таком случае, можно разделить на части, которые можно заменить развертывающимися поверхностями, а затем выполнить отдельные развертки этих частей.

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата: торсы, конические и цилиндрические.

Линейчатые косые и нелинейчатые поверхности этим свойством не обладают. Существуют различные способы построения их условных разверток при помощи аппроксимации.

Если будем рассматривать поверхность и ее развертку как точеч-ные множества, то между этими двумя множествами должно устано-виться взаимно однозначное соответствие и каждой точке на поверх-ности должна соответствовать единственная точка на развертке, каж-дой линии поверхности должна соответствовать линия на развертке и наоборот.

*Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой* (рис. 9.2).

Между поверхностью (рис. 9.1) и ее разверткой существует взаимно-однозначное точечное соответствие (точке **A** на поверхности соответствует точка **А’** на развертке, и наоборот), обладающее следующими свойствами (рис. 9.2):

1) длина линии **а** на поверхности равна длине линии **а**’ соответствующей ей на развертке;

2) угол **α°** между кривыми **m** и **n** на поверхности равен углу **α’°** между соответствующими им кривыми **m’** и **n’** на развертке (углом между кривыми называется угол между касательными к ним в точке пересечения);

3) площадь отсека **С** поверхности равна площади соответствующе-го ему отсека **С’** развертки.

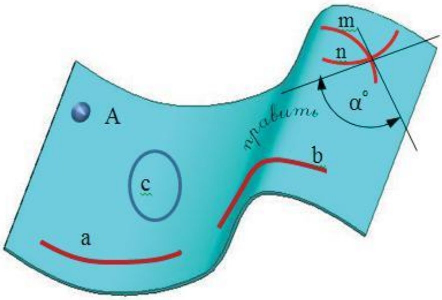



Рис. 9.1. Пример кривой поверхности

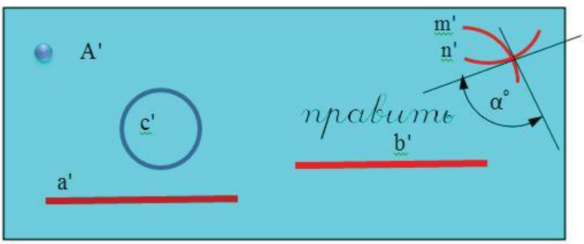



Рис. 9.2. Развёртка поверхности

В дифференциальной геометрии доказывается, что второе и третье свойства являются следствием первого. Первое свойство вытекает из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Из рассмотренных свойств следует:

1) прямой линии (**a**) на поверхности соответствует прямая (**a’**) на развертке;

2) прямой линии **b** на поверхности соответствует прямая (**b’**) на развертке.

Однако оба указанных свойства обратной силы не имеют, т. е. не всякой прямой на развертке соответствует прямая на поверхности. Примерами этого могут служить цилиндрическая винтовая линия, параллели поверхности вращения.

Если кривой линии, принадлежащей поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта кривая линия является **геодезической** для данной поверхности.

Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и соединяющая кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

## 9.2. Способы построение разверток многогранников

Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную при совмещении всех его граней с плоскостью. Следовательно, построение развертки многогранника сводится к построению истинных величин его граней. Выполнение этой операции связано с определением натуральных величин его ребер, которые являются сторонами многоугольников – граней, а иногда и некоторых других элементов. Ребра многогранника условно разделяются на боковые и стороны основания. Существуют три способа построения разверток многогранных поверхностей:

1) способ треугольников (триангуляции);
2) способ нормального сечения;
3) способ раскатки.

## 9.3. Построение развертки пирамиды способом триангуляции

Боковые грани любой пирамиды являются треугольниками. Для построения развертки пирамиды (рис. 9.3) необходимо предварительно определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания.

У изображенной на рисунке пирамиды стороны основания являют-ся горизонталями и проецируются на плоскость $\mathbf{П_1}$в истинную величину. Истинные величины боковых ребер определены способом прямоугольных треугольников **$S_2M_0C_0$**, **$S_2M_0B_0$** и **$S_2M_0A_0$**, у которых одним катетом является высота пирамиды (**$S_2M_0$** – разность высот точки **S** и точек **A**, **B**, **C**), а другим – горизонтальная проекция соответствующего ребра.

$(/M_0C_0/ = /S_1C_1/; /M_0B_0/ = /S_1B_1/; /M_0A_0/ = /S_1A_1/; /M_0K_0/ = /S_1K_1/)$.

Натуральные величины ребер пирамиды могут быть определены способом вращения вокруг оси, проходящей через вершину **S** и перпендикулярной плоскости **$П_1$**.

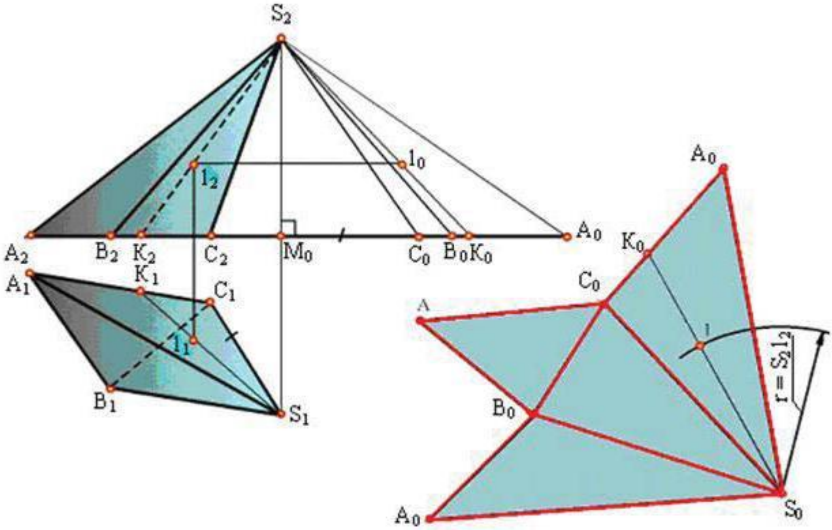



Рис. 9.3. Построение развертки пирамиды

Следующая операция состоит в построении каждой боковой грани как треугольника по трем сторонам. В результате получается развертка боковой поверхности пирамиды в виде ряда примыкающих друг к дру-гу треугольников с общей вершиной **S**. Присоединив к полученной фи-гуре основание **( ABC**), получим полную развертку пирамиды. По-строение на развертке точки 1, принадлежащей поверхности пирамиды, понятно из чертежа. Такой способ построения развертки поверхности называется способом триангуляций.

## 9.4. Построение развертки призмы способом нормального сечения

Для построения развертки наклонной призмы, изображенной на рис. 9.4 необходимо найти истинные величины боковых ребер и сторон основания призмы. Призма расположена так, что ее боковые ребра параллельны плоскости **П2** и проецируются на нее в натуральную величину. Стороны оснований являются горизонталями и проецируются на плоскость **П1** без искажения. Таким образом, длины сторон каждой грани известны, однако этого еще недостаточно для построения истинной формы боковых граней.

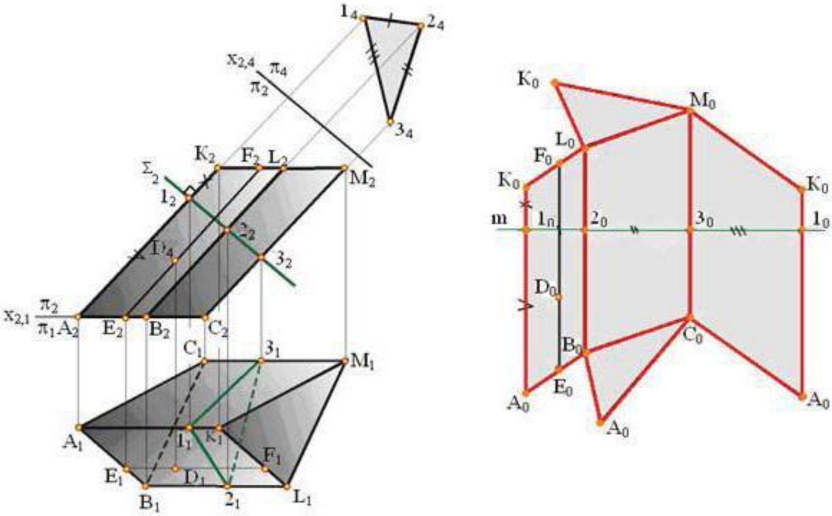



Рис. 9.4. Построение развертки призмы

Боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами, которые не могут быть построены по четырем сторонам. Для построе-ния параллелограмма необходимо помимо длины сторон знать еще его высоту. Для определения высот граней пересечем призму плоскостью Σ (Σ2), перпендикулярной к ребрам (способ нормального сечения), и определим истинную величину сечения путем замены плоскостей проекций. Стороны этого нормального сечения и будут высотами соответствующих граней. Теперь приступаем к построению развертки. На свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую m и откладываем на ней отрезки /1 – 2/ = /$1_4$ – $2_4$/, /2 – 3/ = /$2_4$ – $3_4$/ и /3 – 1/ = /$3_4$ – $1_4$/.

Через точки 1, 2, 3, 1 проводим перпендикуляры к прямой m и откладываем на них величины боковых ребер так, чтобы /A1/ = /$A_2 1_2$/ и /1K/ = /$1_2 K_2$/, /B2/ = /$B_2 2_2$/ и /2L/ = /$2_2 L_2$/ и т. п.

Соединив концы построенных отрезков, получим развертку боко-вой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, получим полную развертку призмы. Построение на развертке точки 4, принадлежащей поверхности призмы, понятно из чертежа.

## 9.5. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей

Необходимо отметить, что к развертывающимся поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности).

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это можно объяснить тем, что при развертке такой поверхности ее аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников.

Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности происходит спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что и приводит к потере точности. Обычно строят приближенные развертки поверхностей, вполне пригодные для практических целей. Используя способ триангуляции необходимо определить истинные величины ре-бер вписанной пирамиды. Поверхность заменяется многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Рассмотрим примене-ние способа триангуляции к построению развертки эллиптического ко-нуса, изображенного на чертеже (рис. 9.5).

Триангуляция конической поверхности осуществляется вписыванием в нее пирамидальной поверхности, которая определяется ломаной 1 – 2 – 3 – 4, ..., вписанной в направляющую кривую конуса, и верши-ной S. Развертка этой n-угольной пирамиды и принимается за развертку конуса. Все построения на чертеже (рис. 9.5) выполняются аналогично построениям на чертеже (рис. 9.3). Ломаная линия 1 – 2 – 3 – 4, ..., получающаяся на развертке пирамиды, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

При построении разверток цилиндрических поверхностей способ триангуляции, как правило, не применяется. Цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной в нее призматической поверхностью.

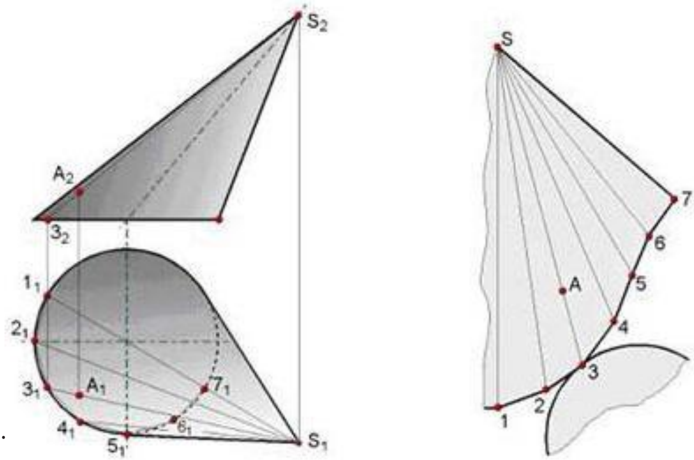



Рис. 9.5. Построение развертки эллиптического конуса

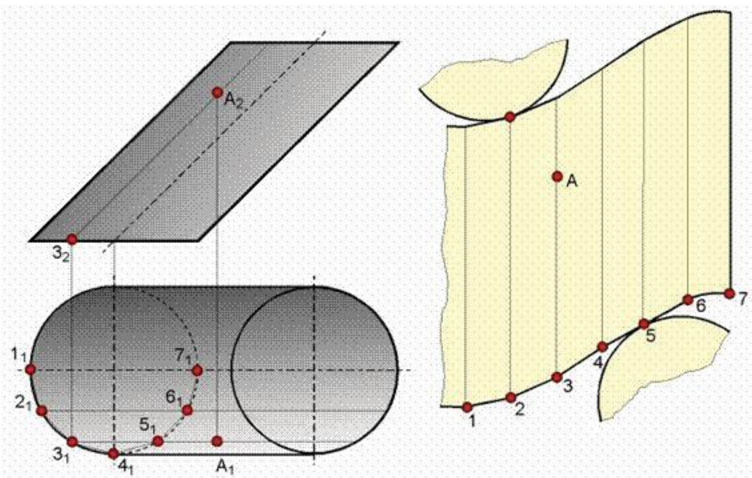



Рис. 9.6. Построение развертки цилиндрической поверхности

Эта поверхность определяется ломаной 1 – 2 – 3 – 4, ..., вписанной в направляющую кривую цилиндра, и направлением образующих. Развертка этой n-угольной призмы и принимается за развертку цилиндра (рис. 9.6). Все построения выполняются, как на рис. 9.2.

Ломаная линия 1 – 2 – 3 – 4, ..., получающаяся на развертке призмы, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки. Развертка бо-ковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой пря-моугольник со сторонами, соответственно равными 2πr и h, где r – ради-ус окружности основания цилиндра, а h – его высота.

## 9.6. Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

Развертку неразвертывающейся поверхности построить нельзя. Для построения условной развертки такой поверхности применяют метод аппроксимации, который заключается в следующем.

Данная неразвертывающаяся поверхность Ф разбивается на некоторые отсеки. Каждый из этих отсеков заменяется отсеком кривой развертывающейся поверхности. Совокупность всех отсеков развертывающихся поверхностей называется обводом Ф’ поверхности Ф. С помощью триангуляции обвод Ф’ заменяется обводом Ф» гранных поверхностей. Развертка гранных поверхностей, образующих обвод Ф», принимается за условную развертку поверхности Ф. При свертывании такой развертки, кроме изгибания, необходимо произвести частичное растяжение или сжатие отдельных ее участков.

### Построение развертки сферы

Сферическая поверхность является неразвертывающейся. Существующие методы построения ее развертки дают лишь приближенные результаты. Сущность одного из них заключается в том, что элемент сферической поверхности заменяется элементом цилиндрической поверхности касательной к сфере по главному меридиану m. Ось такой цилиндрической поверхности проходит через центр сферы перпендикулярно $G_2$. При этом под элементом сферы понимают часть ее, ограниченную двумя большими окружностями.

Для выполнения построения развертки поверхность сферы:

1) разделить большими окружностями на несколько (например, 6) равных частей. Каждый из образовавшихся элементов сферы проецируется на плоскость $П_1$, в виде сектора;

2) описать вокруг сферы цилиндрическую поверхность, ось кото-рой проходит через центр сферы перпендикулярно к $\Pi_2$;

3) заменить элемент сферы частью цилиндрической поверхности. Горизонтальной проекцией этого цилиндрического элемента окажется треугольник $A_1B_1O_1$, а фронтальной – контур сферы (дуга окружности).

4) для построения развертки цилиндрического элемента (лепестка) разделить его фронтальную проекцию на восемь равных частей;

5) построить горизонтальные проекции образующих, соответствующих точкам деления. Истинные длины отрезков образующих для построения развертки взять с горизонтальной проекции (отрезки $A_1$ $B_1$, $C_1$ $D_1$, $E_1$ $F_1$, $G_1$ $H_1$) а расстояния между ними измерить на фронтальной проекции (расстояния между точками $1_22_2$, и $2_23_2$);

6) при построении цилиндрического элемента (лепестка) через середину отрезка $AB = A_1B_1$ провести вертикальную ось симметрии лепестка, на которой отложить вверх и вниз четыре отрезка $1_0 – 2_0 = 1_22_2$, $2_0 – 3_0 = 2_23_2$, $3_0 – 4_0 = 3_24_2$, $4_0 – 5_0 = 4_25_2$.

7) через точки $2_0$, $3_0$, $4_0$ провести отрезки $C_0D_0 = C_1D_1$, $E_0F_0$, $G_0H_0 = G_1H_1$. 8) соединить плавной кривой концы отрезков, в результате чего получится развертка верхней половины лепестка.

При выполнении построения развертки часто возникает необходимость определить положение какой-либо точки на поверхности. Рассмотрим положение точки К на поверхности сферы и перенесем ее изображение на развертку. Это можно выполнить с помощью двух координат дуг $S_1$ и $S_2$. $S_2$ показывает смещение точки К от экватора к полюсу, а дуга $S_1$ − смещение ее от одного из меридианов по параллели сферы. Дуга $S_2$ равна той части меридиана сферы, которая ограничена экватором и параллелью, проходящей через точку К ($К_2$).

Длину этой дуги $S_2 = K_2{}' M_2$ нужно откладывать на развертке от эква-тора соответствующего лепестка по вертикальной оси симметрии.

Строим развертку каждого сектора (лепестка) цилиндрической поверхности.

На чертеже (рис. 9.7, в) показана развертка одного из них. Затем ломаная 1 – 3 – 5 – 7... заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки (рис. 9.7, г). Полученная фигура принимается за условную развертку сектора сферы.

Полная развертка сферы будет состоять из восьми таких фигур (рис. 9.7, д).

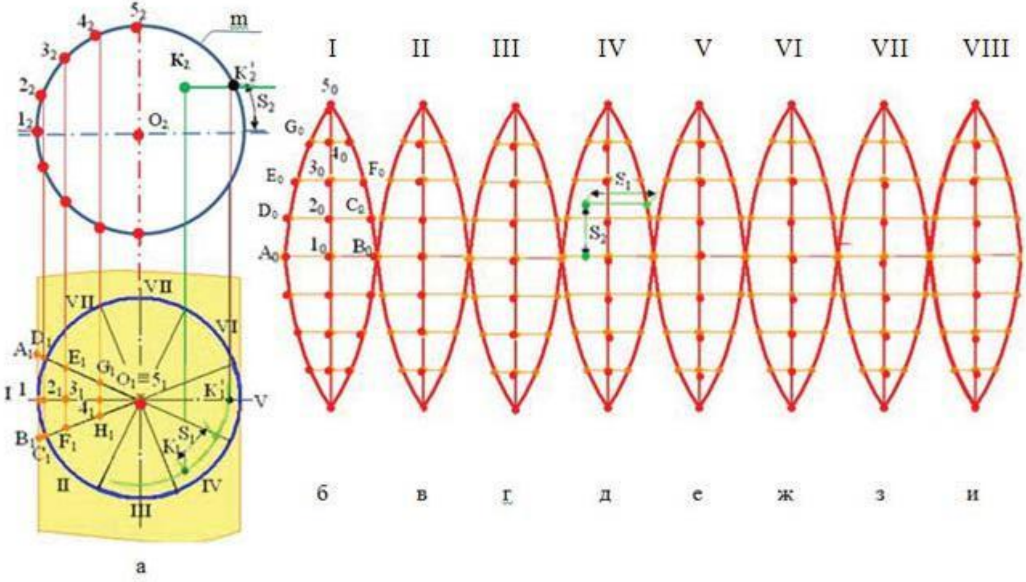



Рис. 9.7. Построение развертки сферы

## Вопросы для самоконтроля

*1. Какие поверхности называются развёртывающимися?*

*2. Какие поверхности обладают свойством развёртываемости?*

*3. Какие способы построения условных развёрток вы знаете?*

*4. Что представляет собой развёртка многогранника?*

*5. Какие способы развёрток гранных поверхностей вы знаете?*

*6. В чём сущность способа нормального сечения?*

*7. Какова развёртка кривых развёртывающихся поверхностей?*

*8. В чём сущность способа раскатки?*

*9. Как построить условную развёртку неразвёртывающихся поверхностей?*

# 10. ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТИ

## 10.1. Основные положения

Касательные плоскости имеют большое значение в начертатель-ной геометрии. С помощью касательных плоскостей можно опреде-лить направление нормали **n** к рассматриваемой поверхности **β** в точ-ке касания **M**.

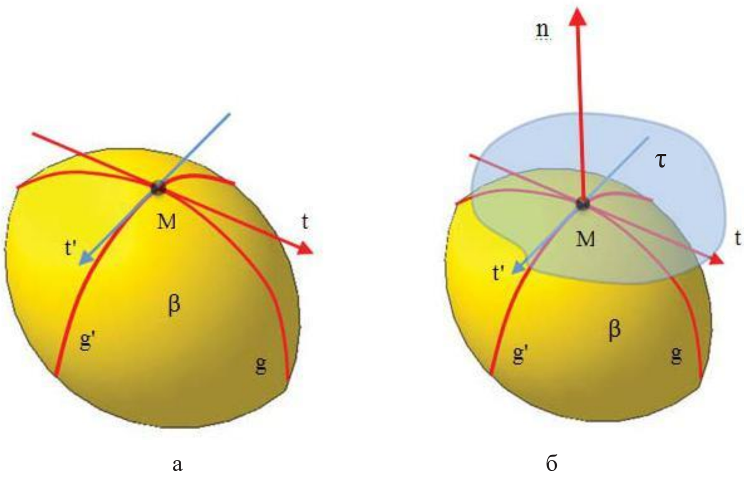



Рис. 10.1. Касательные к поверхности α: а – прямая t , б – плоскость

Решение таких задач нашло широкое применение в инженерной практике и в архитектурном проектировании. С помощью касательных плоскостей выполняется построение очерка геометрических фигур, ограниченных замкнутыми поверхностями и при определении границы собственных теней.

Прямая линия **t**, касательная к какой-либо кривой линии **g**, принадлежащей поверхности, является касательной и к поверхности (рис. 10.1, а).

Плоскость **τ**, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке **M**, есть множество всех прямых – касательных, проведенных к поверхности через данную точку. Через любую точку **M** поверхности **β** можно провести множество кривых, а, следовательно, и множество касательных прямых. Положение плоскости **τ** в пространстве определяется двумя пересекающимися прямыми, поэтому для построения касательной плоскости к поверхности в заданной точке достаточно построить касательные **t** и **t'** к двум кривым линиям **g** и **g'**, проходящим через эту точку. В качестве таких кривых выбирают наиболее простые линии поверхности. Если данная поверхность является линейчатой, то за одну из таких кривых целесообразно взять прямолинейную образующую (касательная к прямой линии есть сама прямая).

Нормалью к поверхности в заданной точке называется прямая, которая перпендикулярна к касательной плоскости τ и проходящая через точку касания (рис. 10.1, б).

В дифференциальной геометрии доказано, что все эти касательные прямые располагаются в одной плоскости, которая называется **касательной плоскостью (τ)** к поверхности в данной ее точке (рис. 10.1, б).

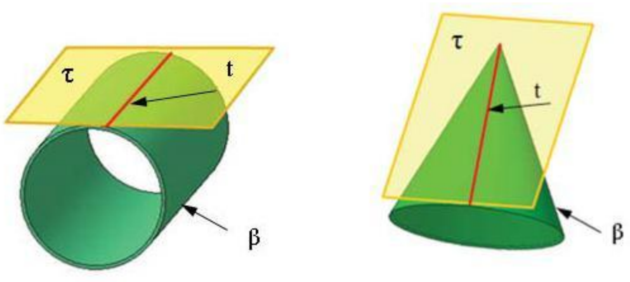
Если через точку поверхности можно провести касательную плоскость и при том одну, то точка поверхности называется о б ы к н о в е н н о й, в другом случае – о с о б о й (например, вершина конической поверхности).

Касательная плоскость и кривая поверхность могут занимать различные положения относительно друг друга. При этом общим элементом может быть только элемент касания: либо точка **M** (рис. 10.1), либо линия, которая может быть прямой **t** (рис. 10.2) или кривой **ℓ** (рис. 10.3.б).

На рис. 10.1. касательная плоскость **τ** имеет с поверхностью **β** одну общую точку. При этом, все линии поверхности, пересекающиеся в этой точке, находятся с одной стороны от касательной плоскости и точка в этом случае называется эллиптической, а поверхности, у которых все точки эллиптические будут криволинейными и выпуклыми. К таким можно отнести поверхности сферы, тора, параболоида и эллипсоида.

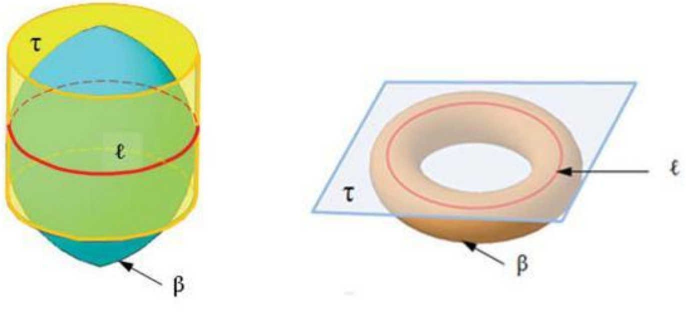
Когда касательная плоскость имеет с поверхностью общую плоскую линию (прямую или кривую), точки, принадлежащие этой линии, называют параболическими (рис. 10.2, 10.3, б). Такие общие линии имеют поверхности цилиндра, конуса и тора и торса.

Для построения поверхности, соприкасающейся с рассматриваемой поверхностью вращения, используются соосные с заданной поверхностью цилиндр (рис. 10.3, а) и конус вращения.




а б

Рис. 10.2. Изображение касательных прямых на поверхности: а – цилиндра, б – конуса




а б

Рис. 10.3. Изображение касательных кривых линий на поверхности тора при касательной: а – поверхности цилиндра, б – плоскости

Когда касательная плоскость имеет с поверхностью общую точку и при этом пересекает поверхность по двум линиям, указанную точку называют г и п е р б о л и ч е с к о й, которая принадлежит линии, по которой касательная плоскость пересекает поверхность.

Каждый отсек поверхности, у которой все точки являются гиперболическими, имеют форму седлообразную. Если рассматривать касательную плоскость к поверхности однополосного гиперболоида (рис. 10.4), то можно отметить, что касательная плоскость **τ**, пересекает поверхность гиперболоида **β** в точке **A** по двум прямым **a** и **b**.

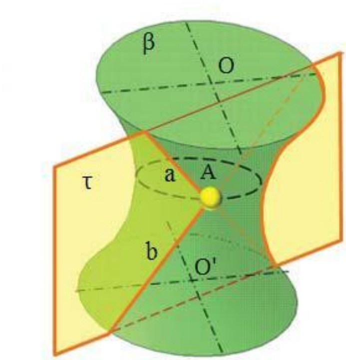



Рис. 10.4. Изображение касательной плоскости к гиперболической поверхности

Касательные плоскости к поверхностям можно провести, если при этом плоскость:

1 – касается поверхности в точке, ей принадлежащей;

2 – проходит через точку, лежащую вне поверхности;

3 – проходит через линию (прямую или кривую), принадлежащую поверхности;

4 – проходит через прямую, не принадлежащую поверхности;

5 – проходит параллельно прямой; 6 – проходит параллельно заданной плоскости.

## 10.2. Примеры построения касательной плоскости к поверхности

Построение плоскостей, касательных к поверхностям может быть выполнено различными способами и зависит от вида поверхности и условий задачи.

К таким способам можно отнести:

– построение касательных прямых к двум кривым линиям поверхности и проходящим через одну точку, принадлежащую поверхности (рис. 10.1);

– построение касательного следа плоскости к одноименному следу поверхности, который с линией касания определяет эту плоскость;

– построение вспомогательного сечения поверхности с проведени-ем к нему касательной прямой определенного направления.

При решении рассмотренных выше задач на построение касательных плоскостей, используется положение о сохранении касания прямой к кривой линии в пространстве и в проекции.

Рассмотрим примеры построения касательных плоскостей к линейчатым поверхностям с параболическими точками. К таким поверхностям относятся поверхности конуса и цилиндра. В таких случаях касательная плоскость к поверхности в заданной её точке должна определяться двумя прямыми, касательными к двум пересекающимися в этой точке кривым линиям поверхности. Касательную плоскость к заданной точке для конуса и цилиндра можно определить двумя пересекающимися прямыми. Одна из этих прямых образующая, проходящая через заданную точку, а вторая является касательной к любой кривой линии поверхности, проходящей через заданную точку.

**Пример 1.** *Построить касательную плоскость к поверхности кону-са и проходящую через точку A, лежащую на его поверхности* (рис. 10.5).

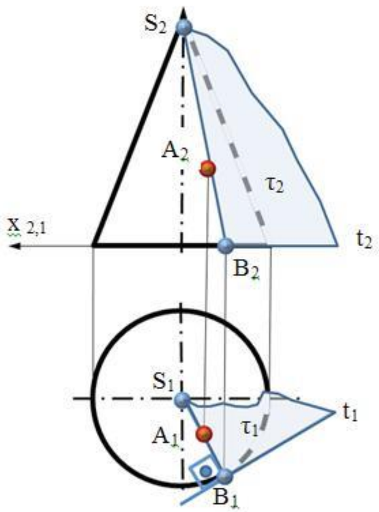



Рис. 10.5. Построение касательной плоскости к поверхности конуса

В рассматриваемом случае касательную плоскость **τ** определяют образующая **SB** поверхности конуса проходящая через точку **A**, принадлежащую поверхности конуса и касательная **t** к очерку конуса в точке **B** на горизонтальной плоскости проекций **$П_1$**. В примере касательная плоскость к поверхности конуса образована двумя пересекающимися прямыми **τ** (**SB** ∩ **t**).

Кроме рассмотренного выше примера существует и другой вариант.

**Пример 2.** *Построить плоскость касательную к поверхности конуса и проходящую через точку С, не принадлежащую поверхности конуса* (рис. 10.6).

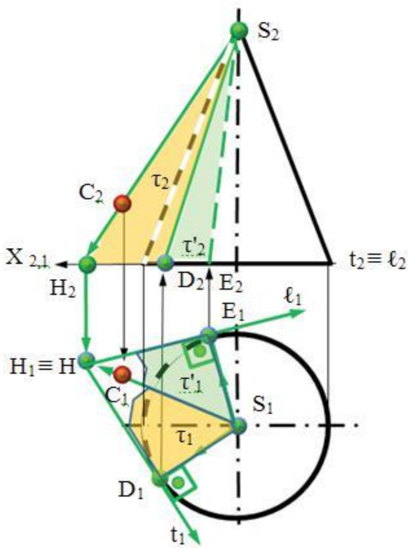



Рис. 10.6. Касательные плоскости к конусу через точку, не принадлежащую поверхности конуса

Для решения предложенного примера необходимо через вершину **S** и заданную точку **C** провести прямую **SC** и найти её горизонтальный след **$H_1$**. Через этот след необходимо провести две касательные линии **$t_1$** и **$ℓ_1$** к очерку касательной поверхности и получить две точки касания **D**, **E**. Затем через эти точки провести образующие **SD** и **SE** (**$S_1D_1$**; **$S_1E_1$**и **$S_2D_2$**; **$S_2E_2$**). Пересечение рассмотренных образующих с касательными **$t_1$** и **$ℓ_1$** в точках **D** и **E** позволяет образовать две касательные плоскости к по-верхности конуса **τ**(**SD** ∩ **t**) и **τ'**(**SE** ∩ **$ℓ_1$**).

**Пример 3.** *Построить плоскость, параллельную прямой **d** и касательную к конусу* (рис. 10. 7).

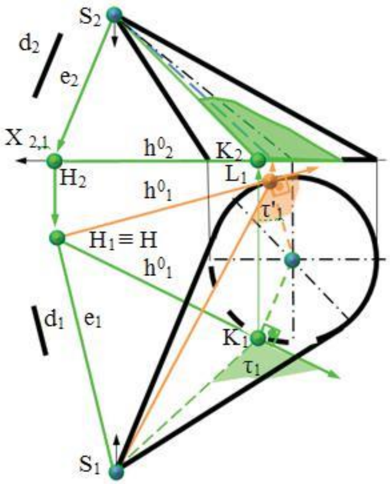



Рис. 10.7. Плоскости касательные к конусу и параллельные прямой

Для выполнения предложенной задачи возможно построение двух плоскостей. Для этого через вершину конуса **S** параллельно заданной прямой **d** необходимо провести прямую **e** и построить её горизонтальный след на плоскости основания поверхности конуса. При этом необходимо отметить, что через этот горизонтальный след прямой **e** проходят два горизонтальных следа $\mathbf{h^0{}_1}$ плоскостей $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}$', касательных к поверхности конуса. Их точки касания **К** и **L** образуют касательные образующие **SK** и **SL**. На рис. 10.7 касательные плоскости обозначены разным цветом.

**Пример 4.** *Построить плоскость, касательную к наклонному цилиндру и параллельную прямой **d*** (рис. 10.8).

Для решения этой задачи нужно: через произвольную точку **С** провести две прямые, одна из которых **e** – параллельна образующим цилиндра, а вторая параллельна заданной прямой **d**; найти их горизонтальные следы **H(H$_1$, H$_2$)** и **H'(H'$_1$, H'$_2$)**, которые определяют направление горизонтального следа $\mathbf{h^0}$ плоскости, параллельной касательной; параллельно этому следу провести следы двух касательных плоско-стей $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}$**'** в точках касания **К** и **L** к цилиндру.

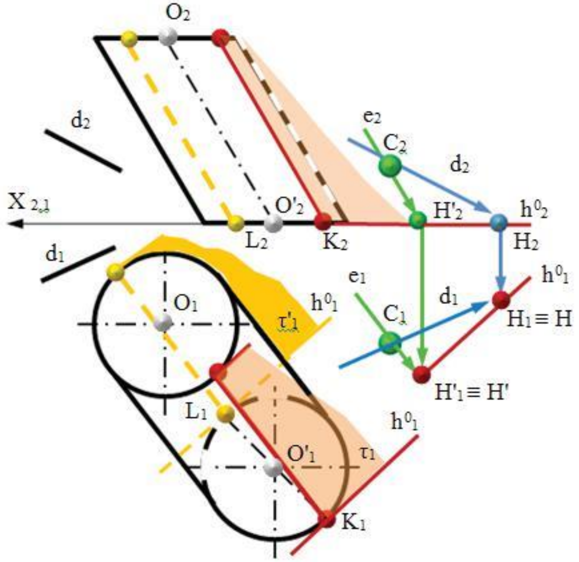



Рис. 10.8. Пример построения касательных плоскостей к поверхности цилиндра

**Пример 5.** *Построить плоскость касательную к поверхности вытянутого эллипсоида и проходящую через точку К, принадлежащую заданной поверхности* (рис. 10.9).

Для решения задачи через точку **К** необходимо провести параллель поверхности и к ней касательную **t**. Фронтальная проекция этой касательной линии совпадёт с фронтальной проекцией параллели, а горизонтальная проекция этой касательной $\mathbf{t_1}$ будет касательной линией к окружности, т.е. горизонтальной проекцией параллели. За вторую кривую, проходящую через точку **К** можно принять имеющийся на чертеже главный меридиан (очерк фронтальной проекции эллипсоида), но для этого нужно представить, что заданный эллипсоид повернулся вокруг своей оси **CD** так, чтобы меридиан, проходящий через точку **Е**, занял положение главного меридиана **СКD**. При этом точка **Е** займет положение точки **К**. В этом случае, проведя касательную **t'** к эллипсу, получим фронтальную проекцию второй касательной линии $\mathbf{t'_2}$ к эллипсоиду в точке **Е.** Следующим шагом построения должен быть поворот этой касательной таким образом, чтобы она прошла через точку **К**. Тогда точка

**S** окажется на касательной линии **t'** и на оси эллипсоида и останется без движения, направление горизонтальной проекции касательной ли-нии $\mathbf{t'_1}$ к меридиану совпадёт с направлением $\mathbf{S_1K_1}$.

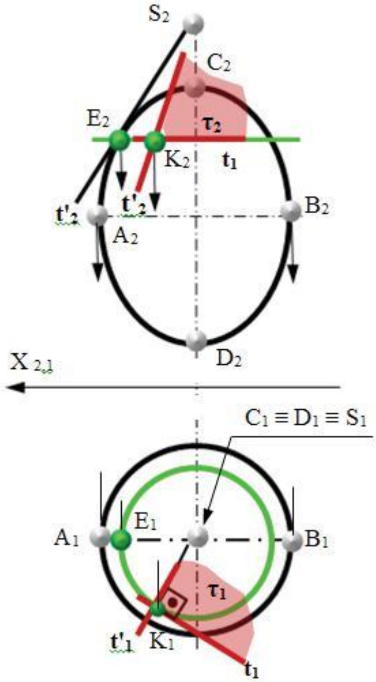



Рис. 10.9. Построение касательной плоскости к эллипсоиду

Найденные касательные линии определят касательную плоскокость к поверхности эллипсоида вращения.

## Вопросы для самоконтроля

*1. Какая линия называется касательной к поверхности?*

*2. Как определяется положение касательной плоскости к поверхности?*

*3. Какая линия называется нормалью к поверхности?*

*4. Какая точка поверхности называется обыкновенной?*

*5. Какую точку поверхности называют особой?*

*6. Какой элемент может быть общим у поверхности и касательной плоскости?*

*7. Привести примеры поверхностей с общими элементами.*

*8. Какая точка называется эллиптической?*

*9. Какая точка называется гиперболической?*

*10. При каких условиях можно провести касательную плоскость к поверхности?*

*11. Какими способами можно построить касательную плоскость?*

*12. В каких случаях необходимо построение касательной плоскости?*

# 11. ОСНОВАТЕЛИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

При развитии науки и технологий в настоящее время можно изобразить не только существующие, но и воображаемые объекты. Изображения могут быть плоскими и рельефными. К плоским изображениям можно отнести: картины, фотографии, рисунки и чертежи. К рельеф-ным изображениям можно отнести всякого рода объекты [7].

Возникновение геометрии уходит вглубь тысячелетий и связано, прежде всего, с развитием различных ремёсел, культуры, искусств, с трудовой деятельностью человека и наблюдением окружающего мира. Об этом говорят названия геометрических фигур: «трапеция» «трапезион» – столик, «конус» «конос» – сосновая шишка, «линия», «линум» – льняная нить [6].

Необходимость изображений объектов на плоскости появилась у людей в древности. Об этом свидетельствуют многочисленные изображения первобытного человека на стенах пещер, где он пытался графически рассказать о важных событиях в его жизни.

Судя по сохранившимся отрывкам древнеегипетских сочинений, геометрия развивалась не только из измерений Земли, но также из измерений объемов и площадей при земляных и строительных работах. Геометрия в первоначальном значении есть наука о фигурах, взаимном расположении и размерах частей, а также о преобразованиях фигур.

Начертательная геометрия раздел геометрии, в котором пространственные фигуры изучаются при помощи построения их изображений на плоскости, в частности построения проекционных изображений. В этом же разделе рассматриваются методы решения и исследования пространственных задач на плоскости [7].

Данный раздел возник из практических потребностей человека. Запросы точного естествознания, техники, промышленности и искусства способствовали развитию этой науки. Необходимость изображать окружающие и вновь создаваемые предметы появились на заре человече-ской культуры. Еще в глубокой древности было установлено, что основой для построения изображений, отвечающих определенным условиям, является проекционный чертеж. Примерами использования проекционных методов служат рисунки на граните, сохранившаяся стенная живопись, изображения в папирусах. Содержание древней росписи в китайском шелке и на стенах пещерных храмов Аджанты в Индии весьма разнообразно. Но в основе каждого из этих памятников лежит изображение реальных предметов трехмерного пространства.

Первые архитекторы должны были уметь проектировать и строить не только храмы и дворцы, но и боевые машины, подобные баллистам и катапультам.

По Витрувию, собственно, архитектура состоит из ординации (проектирования), диспозиции (планировки), соблюдения эвритмии, декорума, симметрии и дистрибуции (экономического расчета). В этом перечне встречаются слова, имеющие ныне совершенно другое значение. Ординация, поясняет Витрувий, придает надлежащую меру отдельным частям, в то время как симметрия устанавливает соразмерность количественных пропорций между частями и целым. «Симметрия – есть гармоничность , составляющаяся из членений самого здания и соответствующая ему в целом; это есть идущий от всех отдельных его частей к облику целостной его фигуры отклик соизмеримости со взятой за стандарт его некоей частью»[8].

В глубокой древности, в связи с необходимостью изображать на плоскости предметы в трехмерном пространстве, возникла такая наука как перспектива.

Способы построения перспективных изображений были изложены в трактате «Десять книг об архитектуре» древнегреческого ученого и архитектора Витрувия (конец I в. до н. э.).

История свидетельствует, что египетские пирамиды и храмы, величайшие сооружения Древней Греции и Рима были построены по изображениям прототипам современных чертежей, в которых использовались элементы перспективы. Начала геометрии, и в частности перспективы, можно встретить в трудах древнегреческих и римских ученых.

Относительно точные сведения об уровне геометрических знаний в Древнем Египте сообщает папирус Ахмеса (измерение земельных участков, вычисление пирамид). Основателем геометрии в Греции считают финикиянина Фалеса Милетского, получившего образование в Египте (624-547 гг. до н.э.). Он основал школу геометров, которая положила начало научной геометрии. Ученику Фалеса Пифагору Самосскому (580-500 гг. до н.э.) принадлежат первые открытия в геометрии: теория несоизмеримости некоторых отрезков, например, диагонали квадрата с его стороной, теория правильных тел, теорема о квадрате гипотенузы прямоугольного треугольника. Преемник Пифагора Платон (427-347 гг. до н.э.) ввел в геометрию аналитический метод, учение о геометрических местах и конические сечения. Существовавшая до сих пор элементарная геометрия была расширена и ее названа трансцендентной [8,9].

Систематизировал основы геометрии, восполнил ее пробелы великий александрийский ученый Евклид (III в. до н.э.) в своем замечательном труде. «Начала». Это первый серьезный учебник, по нему в тече-ние двух тысячелетий учились геометрии. Современные учебники элементарной геометрии представляют собой переработку «Начал».

«Золотым веком» греческой геометрии называют эпоху, когда жили и творили математики Архимед (287-195 гг. до н.э.), Эрастофен (275-195 гг. до н.э.), Аполлоний Пергский (250-190 гг. до н.э.). Измерение криволинейных образов связано с именем Архимеда. Он указал методы измерения длины окружности, площади круга, сегмента параболы и спирали, объемов и поверхностей шара, других тел вращения и др. Это были главные дополнения к «Началам» Евклида. Трактатом о конических сечениях прославил свое имя Аполлоний. Трудами последнего, можно сказать, завершается классическая геометрия [6].

Расцвет классической культуры в средние века сменился застоем. В изобразительном искусстве не использовались применявшиеся в древности сведения о перспективе. Глубокий кризис затянулся до эпохи Возрождения.

И только с возрождением строительства и искусств в эпоху Ренессан-са в истории начертательной геометрии начинается новый период разви-тия. В связи с развернувшимся строительством различных сооружений возродилось и расширилось применение употреблявшихся в античном мире элементов проекционных изображений. Наиболее бурно в это вре-мя развивались архитектура, скульптура и живопись в Италии, Нидер-ландах, Германии, что поставило художников и архитекторов этих стран перед необходимостью начать разработку учения о живописной перспек-тиве на геометрической основе. Появились новые понятия: центр прое-цирования, картинная плоскость, линия горизонта, главные точки и т.д.

Появилась линейная прямая перспектива. Это вид перспективы, рассчитанный на фиксированную точку зрения и предполагающий единую точку схода на линии горизонта (предметы уменьшаются пропорционально по мере удаления их от переднего плана). Эта перспектива применяется художниками и архитекторами для построения перспективных изображений на наклонных плоскостях. Применяют её и в монументальной живописи при росписи на наклонных фризах внутри помещений дворцовых сооружений и соборов. Построение перспектив-ных изображений на горизонтальной плоскости применяют при роспи-си потолков (плафонов).

Еще одним фундаментальным понятием науки, которое имеет отношение практически ко всем структурам природы, науки и искусства, является «симметрия».

Симметрия широко встречается в объектах живой и неживой природы. Например, симметрия в химии отражается в геометрической конфигурации молекул. Понятие «симметрии» является центральным при исследовании кристаллов. При этом симметрия внешних форм кристаллов определяется симметрией его атомного строения, которая обуславливает и симметрию физических свойств кристалла.

Особенно широко понятие «симметрии» применительно к физическим и химическим законам в современной науке.

Принцип «симметрии» широко используется в искусстве. Бордюры, используемые в архитектурных и скульптурных произведениях, орнаменты, используемые в прикладном искусстве, все это примеры использования симметрии. Художники разных эпох использовали симметричное построение картины. Симметричными были многие древние мозаики. Такое построение позволяет достигнуть впечатления покоя, величественности, особой торжественности и значимости событий.

Симметрия в искусстве основана на реальной действительности, изобилующей симметрично устроенными формами. Например, симметрично устроены фигура человека, бабочка, снежинка и многое другое. Симметричные композиции статичные (устойчивые), левая и правая половины уравновешены.

Иоганн Кеплер говорил, что геометрия владеет двумя сокровищами: теоремой Пифагора и «Золотым сечением».

Аналитические и дифференциальные методы сложны в применении. «Геометрию надо строить геометрически» (“Geometria geometrice”) – была поговорка среди математиков. Появилась еще одна ветвь геометрии – проективная, в основу которой положен метод проектирования, где нет понятий о числе и величине. Творцами нового направления считаются французские математики Понселе, Шаль, Мебиус. Основу этой науки заложил Дезарг. Он указал, что изображение предмета в ортогональных проекциях и линейной перспективе родственны с геометрической точки зрения [4].

Развитию «вольной перспективы» посвятил свои работы английский математик Тейлор (1685-1731 гг.), разработавший способы решения основных позиционных задач и определения свойств оригинала по его перспективному изображению. Немецкий геометр Ламберт (1728-1777 гг.) применил метод перспективы к графическому решению задач элементарной геометрии, используя свойства афинного соответствия (афинная геометрия). Ламберт решал и обратную задачу – реконструирование объекта по его чертежу, выполненному в центральной проекции.

Французский инженер Фрезье (1682-1773 гг.) объединил работы предшественников в труде «Теория и практика разрезки камней и деревянных конструкций» (1738-1739 гг.), решил задачи построения конических сечений по усложненным данным.Он внёс большой вклад в развитие ортогональных проекций и впервые рассмотрел проецирование объекта на две плоскости – горизонтальную и фронтальную.

Однако строгой теории к представленному собранию отдельных приемов решения задач Фрезье не подвел.

Творцом ортогональных проекций и основоположником начертательной геометрии как науки признан французский геометр Гаспар Монж (1746-1818 гг.). Знания , о методах изображения пространственных фигур и создание единой математической науки по теории и практике изображения пространственных предметов на плоскости, он систематизировал и обобщил. Этими знаниями он поднял начертательную геометрию на уровень научной дисциплины.

Гаспар Монж родился 9 мая 1746 года в небольшом городке Боне (Бургундия) на востоке Франции в семье местного торговца. Он был старшим из пяти детей, которым отец, несмотря на низкое происхождение и относительную бедность семьи, постарался обеспечить самое лучшее образование из доступного в то время для выходцев из незнатного сословия. Его второй сын, Луи, стал профессором математики и астрономии, младший — Жан также профессором математики, гидрографии и навигации. Гаспар Монж получил первоначальное образование в городской школе ордена ораторианцев. Окончив её в 1762 году лучшим учеником, он поступил в колледж г. Лиона, также принадлежавший ораторианцам. Вскоре Гаспару доверили преподавание физики. Летом 1764 года Монж составил замечательный по точности план родного города Бона. Необходимые при этом способы и приборы для измерения углов и вычерчивания линий были изобретены им самим.

Во время обучения в Лионе получил предложение вступить в орден и остаться преподавателем колледжа, однако, вместо этого, проявив большие способности к математике, черчению и рисованию, сумел поступить в Мезьерскую школу военных инженеров, но (из-за происхождения) только на вспомогательное унтер-офицерское отделение и без денежного содержания. Тем не менее, успехи в точных науках и оригинальное решение одной из важных задач фортификации (о размещении укреплений в зависимости от расположения артиллерии противника) позволили ему в 1769 году стать ассистентом (помощником преподавателя) математики, а затем и физики, причём уже с приличным жалованием в 1800 ливров в год [6].

В 1770 году в возрасте 24-х лет Монж занимает должность профессора одновременно по двум кафедрам – математики и физики, и, кроме того, ведёт занятия по резанию камней. Начав с задачи точной резки камней по заданным эскизам применительно к архитектуре и фортификации, Монж пришёл к созданию методов, обобщённых им впоследствии в новой науке – начертательной геометрии, творцом которой он по праву считается. Учитывая возможность применения методов начертательной геометрии в военных целях при строительстве укреплений, руководство Мезьерской школы не допускало открытой публикации его книги вплоть до 1799 года. Книга вышла под названием Начертательная геометрия (Géométriedescriptive) (стенографическая запись этих лекций была сделана в 1795 году). Изложенный в ней подход к чтению лекций по этой науке и выполнению упражнений сохранился до наших дней. Еще один значительный труд Монжа – Приложение анализа к геометрии (L'applicationdel'analyse à lagéometrie, 1795) – представляет собой учебник аналитической геометрии, в котором особый акцент делается на дифференциальных соотношениях.

В 1780 был избран членом Парижской академии наук, в 1794 стал директором Политехнической школы. В течение восьми месяцев занимал пост морского министра в правительстве Наполеона, заведовал пороховыми и пушечными заводами республики, сопровождал Наполеона в его экспедиции в Египет (1798–1801). Наполеон пожаловал ему титул графа, удостоил многих других отличий.

Влюбленный в свое детище – начертательную геометрию, Монж писал: «Очарование, сопровождающее науку, может победить свойственное людям отвращение к напряжению ума и заставить их нахо-дить удовольствие в упражнении своего разума, – что большинству лю-дей представляется утомительным и скучным занятием» [9].

Дальнейшее развитие начертательная геометрия получила в трудах многих ученых. Наиболее полное изложение идей Монжа по ортогональным проекциям дал Г. Шрейбер (1799-1871 гг.), написавший «Учебник по начертательной геометрии» (по Монжу). Он обогатил начертательную геометрию изложением ее на проективной основе, применив идеи Шаля, Штаудта, Рейе, Штейнера и др., разработал теорию теней и сечений кривых поверхностей. Заметны труды ученых немецкой школы. Геометр Вильгельм Фидлер в книге «Начертательная геометрия», изданной в 1871 году, в органической связи с геометрией проективной представил первый обширный курс дисциплины, стоящий на уровне современных требований. Прогрессивными в преподавании были лекции Эмиля Мюллера, продолжившего научное направление Фидлера. В работах А. Манигейма (1880 г.) исследованы вопросы кинематического образования кривых линий и поверхностей в ортогональных проекциях. Обоснование теории аксонометрии дал Вейсбах, технические примеры применения аксонометрии показали братья Мейер.

Развивая теорию аксонометрии, профессор Академии изобрази-тельных искусств и Строительной академии в Берлине Карл Польке (1810-1876 гг.) в 1853 г. открыл основную теорему аксонометрии. Доказа-тельство этой теоремы в 1864 г. вывел немецкий геометр Г.А. Шварц. Обобщенная теорема аксонометрии стала называться теоремой Польке-Шварца. Простое доказательство этой теоремы дал в 1917 г. профессор Московского университета А.К. Власов. Московский геометр Н.А. Гла-голев продолжил работы этого направления, он доказал, что теорема Польке-Шварца есть предельный случай более общей теоремы о парал-лельно-перспективном расположении двух тетраэдров. Привлекают ра-боты австрийского геометра Эрвина Круппа, получившие развитие в трудах русских ученых Н.А. Глаголева, Н.Ф. Четверухина.

В середине XIX века зарождается и получает развитие начертательная геометрия многих измерений – многомерная геометрия. Итальянский математик Веронезе и голландский ученый Скаутте дают начало этому новому направлению. В России многомерная начертательная геометрия развивалась в связи с проблемами физико-химического анализа многокомпонентных структур (сплавов, растворов), состоящих из большого числа элементов. Вместо точек за основные элементы принимаются различные геометрические образы и строится бесчисленное множество плоских геометрических систем (системы параллельных отрезков, векторов, окружностей и т.д.).

К началу XX века относится зарождение векторно-моторного метода в начертательной геометрии, применяющегося в строительной механике и машиностроении. Этот метод разработан Б. Майором, Р. Мизесом и Б.Н. Горбуновым.

Развитие начертательной геометрии в России можно разделить на три периода.

I период – до XIX века (Р. Санников, И.П. Кулибин, Д.В. Ухтомский, М.Ф. Казаков, В.И. Баженов и др.);

II период – от начала XIX века до 1917 года.

В XVII веке в России успешно развивались технические чертежи, выполненные в виде планов и профилей в масштабе. Здесь в первую очередь следует назвать чертежи выдающегося русского механика и изобретателя И.П. Кулибина (1735-1818 гг.). В его проекте деревянного арочно-го моста впервые были использованы ортогональные проекции (1773).

Рождение этой новой науки в России почти совпало с основанием в Петербурге первого в России высшего транспортного учебного заведения – Института Корпуса инженеров путей сообщения (2 декабря 1809 г.)

Питомцы этого института, его профессора и ученые внесли большой вклад в развитие геометрических методов изображения, в теорию и практику начертательной геометрии.

Впервые в России курс начертательной геометрии был прочитан в 1810 году в Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения французским инженером К.И. Потье, учеником Г. Монжа. На русский язык курс переведен помощником К.И. Потье по институту Я.А. Севастьяновым (1796-1849 гг.).

В 1812 г в России вышел в свет первый оригинальный курс начертательной геометрии «Основания начертательной геометрии» Я.А. Севастьянова, которому в 1824 году было присвоено звание первого русского профессора начертательной геометрии. Его курс отличался от курса Потье обстоятельным изложением теоретических вопросов и терминологией, сохранившейся до настоящего времени. Структура курса Севастьянова оставалась неизменной до опубликования в 1870 г. полного курса начертательной геометрии проф. Н.И. Макарова (1824-1904 гг.).

Классическим учебником является «Курс начертательной геометрии» проф. В.И. Курдюмова (1853-1904 гг.).

В первой половине XX века значительный вклад в учебную литературу по начертательной геометрии внёс профессор Н.А. Рынин (1887-1942 гг.), который показал возможные области применения начертательной геометрии.

После Октябрьской социалистической революции начертательная геометрия получила дальнейшее развитие. В вузах страны были организованы специальные кафедры, созданы учебно-методические советы и появились новые учебники и другая учебно-методическая литература по начертательной геометрии. Последователем его идей был Д.И. Каргин (1880-1949 гг.).

III период – советский. На протяжении многих лет во главе советской школы начертательной геометрии стоял известный учёный и педагог проф. Н.Ф. Четверухин (1891-1974 гг.). А.Д. Посвянский (1909-1991 гг. ) был учеником Н.Ф. Четверухина и приложил много усилий для разработки алгоритмов решения задач на пересечение поверхно-стей. Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли проф. И.И. Котов (1909-1976 гг.), В.О. Гордон (1892-1971 гг.), Н.С. Куз-нецов (1915-1980 гг.).

В настоящее время российские учёные совершенствуют методы изображений, теорию конструирования поверхностей в начертательной геометрии с учетом развития техники и компьютерных технологий. Успехи в решении указанных задач в немалой степени зависят и от деятельности современных исследователей.

Начертательная геометрия сыграла значительную роль в упорядочении человеческого мышления. Это лучший способ развития интеллектуальных и творческих способностей. Можно отметить значение геометрии для естествознания, для понимания того, как устроен мир. Геометрия нужна и в практической жизни: каждый человек должен иметь простейшие представления о геометрических фигурах. Геометрия играет важную роль во многих профессиях.

Своеобразие геометрии, выделяющее ее из других разделов математики, да и всех областей науки вообще, заключается в неразрывном, органическом соединении живого воображения со строгой логикой. В своей сущности и основе геометрия и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. В ней всегда присутствуют эти два неразрывно связанных элемента: наглядная картина и точная формулировка, строгий логический вывод. Геометрия соединяет в себе эти противоположности, они в ней взаимно проникают, организуют и направляют друг друга.

Стоит лишь вспомнить классические творения архитектуры, начиная с древнейших пирамид, как сразу становится очевидным, что геометрия в некотором смысле относится к искусству. Искусство лучше всего воспринимать непосредственно. Тому способствуют гравюры М.К. Эшера, они образуют своего рода художественно-геометрический фильм, дающий зрителю редкую возможность увидеть геометрическое начало во многих явлениях природы и красоту – в чисто геометрических конструкциях и построениях.

Потребность в построении изображений по законам геометрии (проекционных чертежей) возникла из практических задач строительства сооружений, укреплений, пирамид и т.д., а на позднем этапе – из запросов машиностроения и техники.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов Г.С.* Начертательная геометрия: учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.

2. *Королёв Ю.И.* Начертательная геометрия: учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2007. – 252 с.

3. *Локтев О.В.* Краткий курс начертательной геометрии: учебник для втузов. – 4-е изд. стер. – М.: Высшая школа, 1999. – 104 с.

4. Начертательная геометрия: учебник для вузов / Н.Н. Крылов, Г.С. Иконникова, В.И. Николаев, В.Е. Васильев / под ред. Н.Н. Крылова – 7-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001. – 224 с.

5. *Фролов С.А.* Начертательная геометрия: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

6. *Швайгер А.М.* Начертательная геометрия. Инженерная графика: электронное пособие. – Челябинск: Национальный Союз производителей CD-ROM и мультимедиа, 2000.

7. Начертательная геометрия: учебник для студентов худож.-граф. факультета педагогических институтов / В.Н. Виноградов. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2005.

8. Начертательная геометрия / под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.: Высшая школа, 2010. – С. 112.

9. Начертательная геометрия: учебник для студентов высш. учеб. заведений, обучающихся по специальности «Технология и предпринимательство» /А.А. Павлова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005. – 301 с. : ил.

10. Конспект лекций по начертательной геометрии: учебник для вузов / . – М.: Издательство «Академия Естествознания», 2009. – 101 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ